UNIVERSIDAD AUTONOMA DE AGUASCALIENTES

Problemas de optimización o de máximos y mínimos

José Villa Morales

Problemas de optimización o de máximos y mínimos

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE AGUASCALIENTES

Problemas de optimización o de máximos y mínimos

José Villa Morales

Problemas de optimización
o de máximos y mínimos

José Villa Morales

Primera edición 2016 (versión electrónica)

ISBN 978-607-8457-99-1

Hecho en México
Made in Mexico

Dedicado a

José Ramón, José Miguel y María José,

mis hijos. El verlos lograr sus propósitos es mi ilusión.

Ana Cecilia,

mi esposa. No pude haber sido más ofortunado.

Irma y Palermo,

mis padres. Gracias por darme la oportunidad de conocer que
la gran mayoría de las cosas de la vida no se enseñan se aprenden.

Ma. de la Luz Palacio Cháires,

su ejemplo será siempre un motivo de inspiración.

Jesús,

mi Dios, gracias.

Índice general

Prólogo

"*Si hiciéramos todo lo que somos capaces de hacer, literalmente nos maravillaríamos*"

Thomas Alva Edison

El presente librito no es un texto de Cálculo Diferencial para principiantes. El lector, para el que está destinado, es aquél que está preocupado por su formación profesional y busca cierta motivación en el estudio de las matemáticas; en particular, en el estudio de problemas de optimización (también llamados problemas de máximos y mínimos) advertimos que será conveniente poseer ciertos conocimientos de Álgebra, Geometría Analítica y Cálculo Diferencial, aunque sea de manera superficial.

Newton, uno de los creadores del Cálculo Diferencial, escribió:

"Al estudiar las ciencias, los ejercicios son más útiles que las reglas".

Esto se puede interpretar diciendo que, en el estudio de las ciencias, la comprensión de los conceptos y los métodos en el planteamiento y la solución de problemas es más útil que la sola aplicación mecánica de fórmulas.

En efecto, es bien conocido en matemáticas que el uso mecánico de fórmulas no ayuda a la motivación y comprensión de esta materia. Si un estudiante que ocupa matemáticas dedica su tiempo a realizar operaciones rutinarias matará en él el interés por esta disciplina e impedirá su desarrollo intelectual y profesional.

Un gran matemático, G. Polya, decía:

"El problema que se plantea puede ser modesto; pero, si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo".

Este pequeño libro es una invitación a que el lector se dé una oportunidad a resolver problemas de optimización. Planteamos el reto de resolver veinte problemas de optimización. Si al intentar un problema, después de un buen tiempo, no hay avances entonces se puede consultar en el texto la solución de dicho problema. Cuenta Y. Perelman que cierto escritor famoso (Stendhal) en sus años de estudiante encontró un problema, que había propuesto Euler en su libro *Introducción al Álgebra*, que le fascinó y comprendió lo que significaba valerse de un arma tan valiosa como el Álgebra.

Así pues, el objetivo es brindarle al alma inquieta y ávida de conocimiento la oportunida de hacer matemáticas de modo que sea algo divertido y retador el resolver problemas matemáticos, esperando que alguno de ellos lo cautive. Hablando metafóricamente, le rogamos encarecidamente al lector que no puede saber si no le gustan las manzanas si nunca ha probado una. Por falta de costumbre al sabor de las manzanas quizá al inicio le sepan un poco insípidas pero después de varios intentos puede ser algo cuyo sabor dulce no olvide fácilmente. Entonces es cuando las matemáticas adquieren sentido, ya sea como un pasatiempo o como una herramienta de trabajo en las distintas disciplinas del conocimiento.

Agradezco a Gabriela Cabral, Fausto A. Contreras, Fernando Cortés, Sandra E. Delgadillo, Jorge E. Macías, Jaime Medina y Palermo Villa el haberse tomado el tiempo para leer el presente trabajo y haberme hecho llegar sus observaciones. De igual forma, aprecio el apoyo recibido, para la publicación, de parte de Manuel Ramírez y José de Jesús Ruíz, Jefe del Departamento de Matemáticas y Física y Decano del Centro de Ciencias Básicas, respectivamente.

Capítulo 1

¿Quieres probar las matemáticas?

"*Uno no debe nunca consentir arrastrarse cuando uno siente el impulso de volar*"

Hellen Keller

Estimado lector, en esta parte describimos el contenido del presente librito, el cual tiene como propósito servirte de motivación al estudio de las matemáticas. En él te daremos los elementos para resolver problemas de optimización. El resultado final de la obra dependerá de tu esfuerzo.

1.1. ¡Miras comer! o ¿comes?

Al tratar de escribir sobre motivar el estudio de las matemáticas podemos tomar, en principio, dos enfoques. Hablando metafóricamente, es como hablar de manzanas. Un primer enfoque sería platicarte sobre manzanas y un segundo enfoque es darte una manzana e invitarte a probarla. El primer enfoque sería presentar problemas o situaciones importantes, quizá recientes, en las que el uso de las matemáticas ha sido sobresaliente.

Esto no estaría mal y no sería difícil encontrar ejemplos ya que el rango de influencia de las matemáticas es tan amplio que no hay una ciencia en la actualidad que no haga uso de ellas. Sólo basta querer verlos. No obstante, hemos preferido el segundo enfoque, un enfoque más activo. Así, al hablar de manzanas yo te podría decir que son redondas, rojas, carnosas y que al morderlas hacen cierto crujido que al mismo tiempo un jugo de sabor dulce inunda el paladar. Seguramente habrá alguien que se le antojen las manzanas. Aquí, nuestro enfoque será éste: te damos a probar la manzana y tú decides si te gusta o no. Es decir, te invitamos a "comer matemáticas" no sólo a "ver comer matemáticas".

1.2. Organización del librito

Una frase común es "la casualidad no existe, todo pasa por alguna razón". Si estás leyendo este librito es porque buscas algo que te atraiga, que te acerque, que te inspire, que te facilite las matemáticas. No lo hagas a un lado, este puede ser el momento en el que impulses tu vuelo sobre el amplio campo de las matemáticas.

Como un buen amigo te diré que sólo andando sobre el campo llegarás a concerlo. Sólo haciendo matemáticas sabrás qué son las matemáticas. Cabe advertirte que, cómo en la mayoría de las cosas que valen la pena en la vida, se requiere de esfuerzo y dedicación, pero la recompensa bien vale el trabajo.

Las matemáticas que se desarrollan en este librito requieren de pocos conocimientos preliminares, un curso elemental de Álgebra es suficiente (ver, por ejemplo, [6]) y ayudará si el lector conoce los principios básicos de Geometría Analítica y del cálculo de límites (ver [5, 7]).

En la primera parte presentamos algunos conceptos preliminares, como son el de línea recta, el de derivada y dos nuevos criterios de máximos y mínimos que se usarán en el estudio de problemas de optimización. En la segunda parte proponemos un esquema de como resolver problemas de optimización, damos un ejemplo en particular y le proponemos al lector que pruebe la manzana, es decir que resuelva veinte problemas de optimización. Si después de cierto tiempo (digamos unos tres días) de haber intentado resolver un problema no hay éxito, la solución se puede consultar en los capítulos de esta segunda parte. Procurar que ver la solución sea el último recurso, y aprender de ésta para tener más éxito en el siguiente problema. En general, no hay una manera única de resolver un problema, en las soluciones que ofrecemos; aquí, hemos procurado que no se usen demasiados hechos preliminares. Insistimos en dar siempre el mayor esfuerzo ya que la satisfacción al resolver un problema es proporcional a éste.

Un lector interesado sólo en el aspecto práctico de la teoría puede ir directamente a la segunda parte. Como hemos comentado ya, en la primera parte, desarrollamos la teoría para tratar principalmente los criterios de optimización. Si el lector quiere continuar haciendo problemas de matemáticas le sugerimos el excelente libro de G. N. Berman [1], del cual hemos tomado algunos problemas.

Se usa la siguiente simbología:

$\Rightarrow$	implica,
$\forall$	para cada,
$\in$	pertenece,
$\mathbb{R}$	números reales,
$\approx$	aproximadamente,
$\text{máx}\{x, y\}$	es el máximo entre x y y,
$\text{mín}\{x, y\}$	es el mínimo entre x y y,
(a, b)	intervalo abierto de extremos a y b,
$[a, b]$	intervalo cerrado de extremos a y b.

Abusando de la notación sólo escribiremos los primeros tres dígitos después del punto decimal. Por ejemplo, escribiremos $\sqrt{2} = 1.414$ (una notación más correcta sería $\sqrt{2} \approx 1.414$).

Parte I

Conceptos preliminares

Capítulo 2

La línea recta

"*Primero hacemos nuestros hábitos, después nuestros hábitos nos hacen*"
John Dryden

En éste capítulo recordamos la definición de línea recta, poniendo especial atención al concepto de pendiente. Por otra parte, encontramos la función inversa de la función inducida por una línea recta.

2.1. Definición y propiedades de la línea recta

La ecuación de una línea recta L que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{2.1}$$

Es decir, un punto (x, y) del plano cartesiano está sobre la línea recta L si y sólo si se cumple la igualdad (2.1). El número

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{2.2}$$

se llama pendiente de la línea recta L.

Sean $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$ y $(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$ otro par de puntos sobre la línea recta L. Entonces estos puntos cumplen la igualdad (2.1), es decir,

$$\frac{\tilde{y}_1 - y_1}{\tilde{x}_1 - x_1} = m, \quad \frac{\tilde{y}_2 - y_1}{\tilde{x}_2 - x_1} = m.$$

Despejemos $\tilde{y}_1$ y $\tilde{y}_2$,

$$\tilde{y}_1 = y_1 + m(\tilde{x}_1 - x_1), \;\; \tilde{y}_2 = y_1 + m(\tilde{x}_2 - x_1).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1}{\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1} &= \frac{y_1 + m(\tilde{x}_2 - x_1) - y_1 - m(\tilde{x}_1 - x_1)}{\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1} \\ &= \frac{m[(\tilde{x}_2 - x_1) - (\tilde{x}_1 - x_1)]}{\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1} \\ &= \frac{m[\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1]}{\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1} = m. \end{aligned}$$

Esto significa que la pendiente m no depende de los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) que tomemos en la línea recta L. Así, la pendiente de una línea recta sólo depende de la recta en sí y no de los puntos que se tomen en ella para calcular su pendiente.

Supongamos que una línea recta L pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m, entonces un punto (x, y) estará en L si y sólo si cumple la igualdad (ver (2.1))

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m. \tag{2.3}$$

Despejando y, de la igualdad anterior, vemos que otra forma equivalente de expresar (2.3) es

$$y = y_1 + m(x - x_1). \tag{2.4}$$

Esta ecuación de la línea recta se llama ecuación punto pendiente.

La pendiente m mide el grado de inclinación de la línea recta L a través de

$$\theta = \tan^{-1}(m), \tag{2.5}$$

donde $\tan^{-1}(m)$ es la función inversa de la función tangente. En la Figura 2.1 aparece la gráfica de $\tan^{-1}(m)$. El ángulo θ es el ángulo que se forma entre la línea recta L y el eje de las abscisas (eje x). Recordemos que los ángulos son positivos si se miden en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

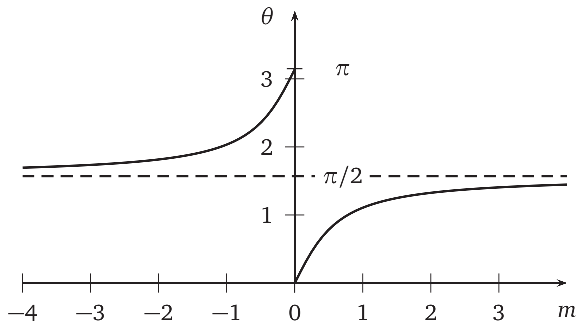


Figura 2.1

De la gráfica de $\tan^{-1}(m)$ notamos lo siguiente:

- Si $m > 0$, entonces $\theta \in (0, \pi/2)$ (es decir, $\theta \in (0, 90^0)$).
- Si $m < 0$, entonces $\theta \in (\pi/2, \pi)$ (es decir, $\theta \in (90^0, 180^0)$).
- Si $m = 0$, entonces $\theta = \tan^{-1}(m)$ no está definido.

De (2.5) se tiene que existe una relación biunívoca entre la pendiente m y el ángulo de inclinación θ. Por otra parte, en la Figura 2.2 vemos dos líneas rectas, la línea recta de la parte (a) tiene pendiente positiva y la línea recta de la parte (b) tiene pendiente negativa.

2.2. Función inversa de la función inducida por una línea recta

Consideremos una línea recta L. Si dicha línea recta tiene pendiente m y pasa por el punto (x_1, y_1) sabemos de (2.4) que (x, y) está en L si se cumple la igualdad

$$y = y_1 + m(x - x_1). \tag{2.6}$$

Esto nos motiva a considerar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = y_1 + m(x - x_1).$$

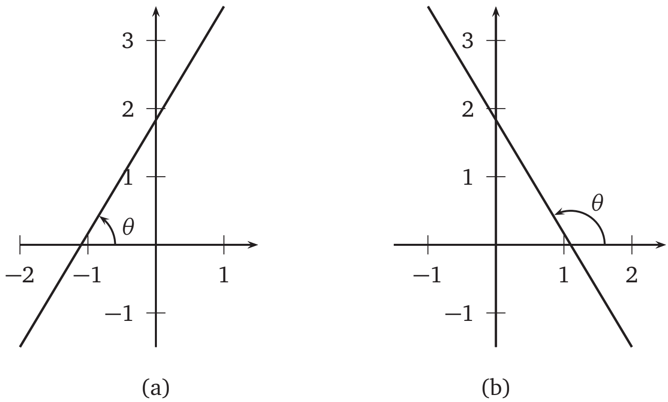


Figura 2.2

La función f se llama función lineal y se acostumbra denotar también por y, o bien por $y(x)$ para indicar que dado un valor de $x \in \mathbb{R}$ se obtiene un valor de y. La gráfica de la función f es justamente la línea recta L.

Ahora nos interesa el problema inverso. Es decir, dada $y \in \mathbb{R}$ nos preguntamos qué valor de x hace que (x, y) esté en L. En seguida indicamos cómo se procede para resolver este problema. Ya que (x, y) estará en la línea recta L, entonces se debe cumplir la igualdad (2.6). De dicha igualdad despejamos x,

$$x = x_1 + \frac{1}{m}(y - y_1). \tag{2.7}$$

Al sustituir este valor de x en (2.6) obtenemos y, así $(x, y) \in L$. Por lo tanto, éste es el valor de x que deseabamos conocer.

Bajo esta situación tenemos que x es función de y, pues el valor de x depende del valor que le asignemos a y. La función $x(y)$ se llama función inversa de f y se denota por f^{-1} (o por y^{-1}). De (2.7) vemos que la gráfica de f^{-1} es una línea recta con pendiente $\frac{1}{m}$ que pasa por (y_1, x_1).

Capítulo 3

La derivada

"*La pereza puede parecer atractiva, pero el trabajo da satisfacción*"
Anne Frank

En esta parte discutimos el concepto de derivada y su significado geométrico.

3.1. Definiciones básicas

Sea f una función con valores reales y definida en (a,b), esto se denota así $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Para cada $x\in(a,b)$ consideramos el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{3.1}$$

Si dicho límite existe decimos que f es diferenciable en x y su valor (llamado derivada de f en x) lo denotamos por $f'(x)$ o por $\frac{d}{dx}f(x)$. Esto nos permite construir la función derivada f', cuyo dominio de definición es el conjunto de puntos x en (a,b) para los cuales el límite (3.1) existe y el valor de f' en x es $f'(x)$. Decimos que f es diferenciable en (a,b) si el dominio de f' es (a,b), es decir si para cada punto de (a,b) el límite (3.1) existe.

No abundaremos sobre el cálculo de límites del tipo (3.1) para encontrar la derivada de una función, esto suele llavar más espacio del que disponenemos en este modesto trabajo. No obstante, en el Cuadro 3.1 se presentan algunas fórmulas básicas que nos permitirán encontrar la derivada de las funciones que estudiaremos aquí (ver [3] para más fórmulas). En el Cuadro 3.1 las literales c, n son constantes y u, v son funciones de x.

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$
2. $\frac{d}{dx}(x) = 1$
3. $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{d}{dx}(u)$
4. $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{d}{dx}(v) + \frac{d}{dx}(v)$
5. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u)$
6. $\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{d}{dx}(u)$
7. $\frac{d}{dx}(\frac{u}{v}) = \frac{v\frac{d}{dx}(u) - u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$
8. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = \frac{d}{dx}(u)\ \cos u$
9. $\frac{d}{dx}(\cos u) = -\frac{d}{dx}(u)\ \operatorname{sen} u$

Cuadro 3.1

Al realizar un cambio de variable se acostumbra escribir, por ejemplo, $u = f(x)$. Nótese que para diferentes valores de x obtenemos diferentes valores de u, entonces u es función de x. Sin embargo, por abuso de notación se suele omitir dicha dependencia; esta convención se usa en las fórmulas del cuadro anterior.

Ejemplo 1 *Encontrar la función derivada de las siguientes funciones:*

(a) $f(x)=\left(x+\sqrt{\operatorname{sen} x}\right)^3, \quad x\in(0,\pi).$

(b) $g(x)=\dfrac{1+x^2}{\cos x}, \quad x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}).$

Solución. (a) Para aplicar las fórmulas del Cuadro 3.1 es más cómodo si escribimos f así: $f(x)=\left(x+(\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{2}}\right)^3$. En seguida indicamos a un lado de cada paso las fórmulas del cuadro que se usan

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\left(x+(\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \frac{d}{dx}\left(x+(\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{2}}\right) \quad \text{(por 6)} \\ &= 3\left(x+(\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \left\{\frac{d}{dx}(x)+\frac{d}{dx}\left((\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{2}}\right)\right\} \quad \text{(por 4)} \\ &= 3\left(x+(\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \left\{1+\frac{1}{2}(\operatorname{sen} x)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)\right\} \quad \text{(por 2 y 6)} \\ &= 3\left(x+(\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \left\{1+\frac{1}{2}(\operatorname{sen} x)^{-\frac{1}{2}}\cos x\right\} \quad \text{(por 8).} \end{aligned}$$

Cuando sea pertinente se simplifica la expresión obtenida. En este caso no se puede simplificar.

(b) Procedemos como en el caso anterior

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\cos x\,\frac{d}{dx}\left(1+x^2\right)-\left(1+x^2\right)\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \quad \text{(por 7)} \\ &= \frac{\cos x\left(\frac{d}{dx}(1)+\frac{d}{dx}\left(x^2\right)\right)-\left(1+x^2\right)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \quad \text{(por 4 y 9)} \\ &= \frac{\cos x\left(0+2x\frac{d}{dx}x\right)+\left(1+x^2\right)\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \quad \text{(por 1 y 6)} \\ &= \frac{(2x)\cos x+\left(1+x^2\right)\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \quad \text{(por 2).} \end{aligned}$$

Obteniendo así el resultado deseado. ■

3.2. Interpretación geométrica de la derivada

Uno de los problemas que resuelve el concepto de derivada es determinar la recta tangente a un punto dado en la gráfica de una función. Veamos en qué consiste esto.

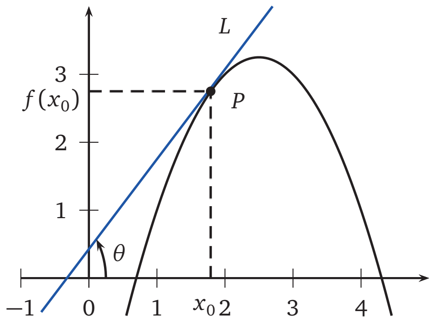


Figura 3.1

Consideremos la gráfica de la función f que aparece en la Figura 3.1.

En ella se traza la recta tangente L al punto $P = (x_0, f(x_0))$, además se indica el ángulo θ entre la recta L y el eje x. Sea h un número suficientemente pequeño tal que $x_0 + h$ está en el dominio de f. Tracemos ahora la recta secante $L(h)$ que pasa por los puntos $P = (x_0, f(x_0))$ y $Q(h) = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ como se indica en la Figura 3.2.

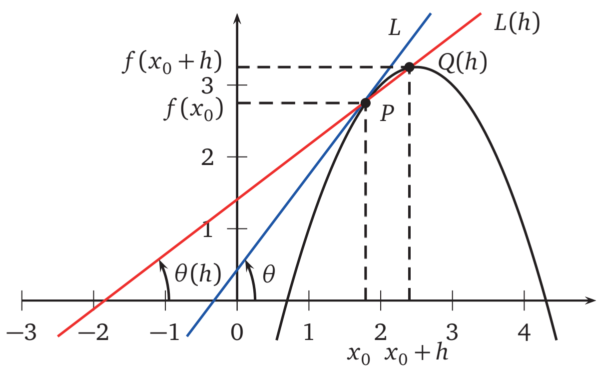


Figura 3.2

Nótese que la pendiente de $L(h)$ es (ver (2.2))

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Por otra parte, sea $\theta(h)$ el ángulo que forma la recta secante $L(h)$ con el eje x, de (2.5) concluimos que

$$\tan\theta(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

De la Figura 3.2 vemos que $\theta(h)$ tiende al ángulo de la recta tangente θ, cuando h se aproxima a 0. Por lo tanto, $\tan\theta(h)$ tiende a $\tan\theta$, cuando h se aproxima a 0 (esto es por la continuidad de la función tangente). Si f es diferenciable en x_0, entonces

$$\tan\theta=\lim_{h\to 0}\tan\theta(h)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0).$$

De ello se deduce que la pendiente ($m=\tan\theta$) de L es justamente $f'(x_0)$. Por ende, de (2.4) se sigue que la ecuación de la recta tangente al punto $P=(x_0,f(x_0))$ es

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0). \tag{3.2}$$

Ejemplo 2 *Encontrar la recta tangente a la gráfica de la función* $f(x)=\left(x+\sqrt{\operatorname{sen} x}\right)^3$ *en el punto* $(2.5,f(2.5))$.

Solución. Del Ejemplo 1 (a) sabemos que

$$\begin{aligned} f'(2.5) &= 3\left(2.5+(\operatorname{sen}(2.5))^{\frac{1}{2}}\right)^2\left\{1+\frac{1}{2}(\operatorname{sen}(2.5))^{-\frac{1}{2}}\cos(2.5)\right\}\\ &= 15.503. \end{aligned}$$

Puesto que $f(2.5)=35.082$, entonces de (3.2) resulta que la ecuación de la recta tangente buscada es

$$y=35.082+15.503(x-2.5).$$

En la Figura 3.3 se aprecia la gráfica de f y la recta tangente. ■

Veamos ahora qué significa intuitivamente que $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ sea diferenciable en (a,b). Sabemos que para cada x_0 de (a,b) el límite (3.1)

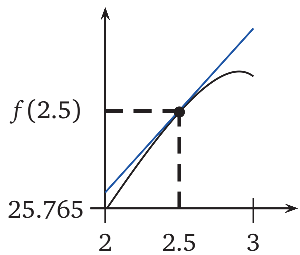


Figura 3.3

existe, por lo tanto, si h es cercana a 0 entonces $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ es aproximadamente igual a $f'(x_0)$, esto lo denotaremos así

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Despejando $f(x_0+h)$ de esta aproximación obtenemos

$$f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h, \tag{3.3}$$

cuando $h \approx 0$. Por ende, si x es cercano a x_0, entonces $x - x_0 \approx 0$, si tomamos $h = x - x_0$ en (3.3) nos queda

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

cuando $x \approx x_0$. Esto significa que para "vecindades" suficientemente pequeñas de x_0 la función f tiene valores cercanos a los de la recta tangente (3.2) en x_0. De esta manera, la gráfica de f es casi la recta tangente.

Por ejemplo, hagamos un acercamiento en el punto $(2.5, f(2.5))$ de la gráfica que aparece en la Figura 3.3. El acercamiento aparece en la Figura 3.4, en ella vemos que en efecto la gráfica de f y la recta tangente no difieren demasiado (sólo un poco en los extremos del intervalo $(2.3, 2.7)$).

Ahora bien, si la gráfica de f tuviese un pequeño pico en algún punto x_0 de (a, b), entonces al hacer un acercamiento a la gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$ resultaría que la gráfica de f no se vería como una línea recta, lo cual es contrario a lo que hemos deducido. Por ende, la gráfica de una función diferenciable no tiene picos, usualmente se dice que su gráfica es suave o que se trata de una función suave.

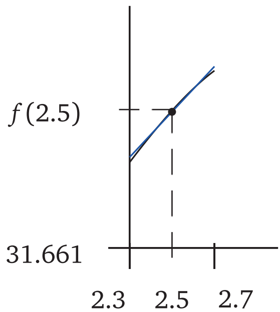


Figura 3.4

En la Figura 3.5 aparece la gráfica de la función $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^4, & x \in (-1,0], \\ \frac{1}{10}x, & x \in (0,1). \end{cases} \tag{3.4}$$

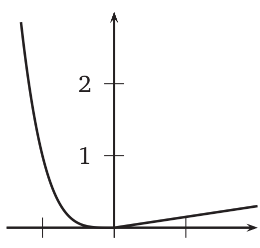


Figura 3.5

Aparentemente la función f es suave, pero al hacer un acercamiento en el punto $(0,0)$ se aprecia, en la Figura 3.6, que hay un pico, por ende, la función no es diferenciable en este punto.

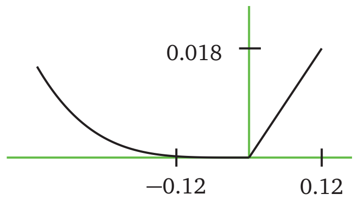


Figura 3.6

Capítulo 4

Algunos resultados teóricos

"*Siempre que te pregunten si puedes hacer un trabajo, contesta que sí y ponte enseguida a aprender cómo se hace* "

Franklin D. Roosevelt

En este capítulo presentamos algunos resultados importantes de las funciones continuas y las funciones diferenciables. Como aplicación de tales resultados deduciremos dos nuevos criterios de máximos y mínimos, los cuales usaremos para resolver los problemas de optimización que trataremos más adelante. Este capítulo se puede omitir si no se está interesado en la justificación rigurosa de los criterios de máximos y mínimos.

4.1. Resultados preliminares

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua, intuitivamente; esto significa que podemos trazar su gráfica sin despegar el lápiz del papel. Ejemplos de funciones continuas son las funciones diferenciables, es decir, toda función diferenciable es continua. El recíproco es falso, por ejemplo, la función (3.4) es continua pero no es diferenciable. Las funciones continuas, aunque no sean suaves, tienen muchas propiedades importantes. Aquí hablaremos sólo de dos de ellas.

Teorema 1 (de Bolzano o del valor intermedio) *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua. Si $f(a)\neq f(b)$ y z es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un punto $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=z$.*

Para presentar la segunda propiedad de las funciones continuas, que nos interesa recordar, necesitamos introducir el siguiente concepto fundamental.

Definición 1 *Sea f una función "real valuada" definida en un intervalo J.*

Un punto $x_0\in J$ se dice que es un:
(i) *mínimo local si existe un intervalo I, contenido en J, tal que*

$$f(x_0)\leq f(x),\ \ \forall x\in I.$$

(ii) *máximo local si existe un intervalo I, contenido en J, tal que*

$$f(x_0)\geq f(x),\ \ \forall x\in I.$$

Un punto $x_0\in J$ se dice que es un:
(i) *mínimo global si*

$$f(x_0)\leq f(x),\ \ \forall x\in J.$$

(ii) *máximo global si*

$$f(x_0)\geq f(x),\ \ \forall x\in J.$$

El número $f(x_0)$ se llama valor mínimo (o máximo) local (o global).

La diferencia entre los conceptos de local y global es que el primero se cumple en un pequeño intervalo contenido en el dominio de la función y en el segundo la propiedad se cumple en todo el dominio de la función, en este caso en J. En cualquier caso, mínimo o máximo diremos que son extremos locales (o globales). En los criterios para extremos que trataremos más adelante es conveniente tener claro que el concepto de extremo global depende del conjunto donde esté definida la función. Con este propósito presentamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3 *Consideremos la función* $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$. (a) *Supongamos que* $f : [-3, 1.7] \to \mathbb{R}$, *entonces de la Figura 4.1 vemos que en* -3 *y en* -2 *se alcanzan el máximo y el mínimo global, respectivamente.*

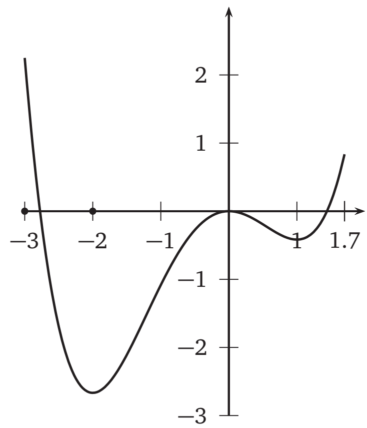


Figura 4.1

(b) *Por otra parte, si* $f : [0, 1.7] \to \mathbb{R}$, *entonces de la Figura 4.2 vemos que en* 1 *y en* 1.7 *se alcanzan el mínimo y el máximo global, respectivamente.*

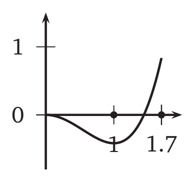


Figura 4.2

Teorema 2 (de Weierstrass o de los extremos) *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua. Entonces* f *tiene su mínimo global y su máximo global en* $[a, b]$. *Es decir, existen* x_m, $x_M \in [a, b]$ *tales que*

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M), \quad \forall x \in [a, b].$$

Ahora vamos a presentar dos propiedades de las funciones diferenciables.

Teorema 3 (de Fermat) *Sea* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *diferenciable en* x_0. *Si* x_0 *es un extremo local, entonces* $f'(x_0) = 0$.

Teorema 4 (de Rolle) *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua en* $[a, b]$ *y diferenciable en* (a, b). *Si* $f(a) = f(b)$, *entonces existe un número* $x_0 \in (a, b)$ *tal que* $f'(x_0) = 0$.

Los puntos donde la derivada se anula son muy importantes, es por ello que reciben un nombre especial:

Definición 2 *Se dice que* x_0 *es un punto crítico de* f *si* $f'(x_0) = 0$.

Así, los puntos críticos de f son aquellos valores donde la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f es cero. Nótese que para funciones diferenciables no todos los puntos críticos son extremos locales (el recíproco si es cierto, por el Teorema de Fermat). En efecto, la función $f(x) = x^3$, $x \in [-1, 1]$, cumple que 0 es un punto crítico, pues $f'(0) = 3(0)^2 = 0$, pero no es un extremo local, ver la Figura 4.3.

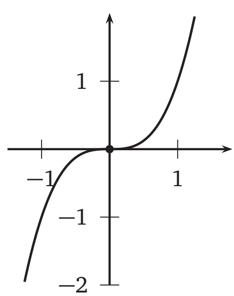


Figura 4.3

Los resultados que se presentaron en esta sección se pueden consultar en [2] o bien en [4].

4.2. Criterios para máximos y mínimos

En la literatura existen varios métodos para determinar cuándo un punto crítico es un extremo local. De hecho, entre los más conocidos están: el criterio de la primera derivada y el criterio de la segunda derivada (ver [4]). En esta sección presentaremos otros criterios nuevos de empleo más específico, pero que son más fáciles de aplicar y tienen un amplio margen de uso. En efecto, ellos se pueden aplicar sin dificultad en muchos problemas habituales de optimización.

Teorema 5 (Criterio C) *Sea* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *continua en* $[a,b]$*, diferenciable en* (a,b) *y con un único punto crítico* $x_0\in(a,b)$*.*
(i) *Si* $f(x_0)\le \min\{f(a),f(b)\}$*, entonces* x_0 *es un punto mínimo global.*
(ii) *Si* $f(x_0)\ge \max\{f(a),f(b)\}$*, entonces* x_0 *es un punto máximo global.*

Demostración. Vamos a demostrar sólo el caso (i), dejando que el lector cubra los detalles del caso (ii).

Por ser f continua en $[a,b]$ del Teorema de Weierstrass se sigue que existen x_m, $x_M\in[a,b]$, los puntos mínimo y máximo globales. Nótese que $x_m\neq x_M$. En efecto, si $x_m=x_M$ implicaría que

$$f(x_M)=f(x_m)\le f(x)\le f(x_M),\quad \forall x\in[a,b],$$

por lo tanto, f sería la función constante $f(x_M)$. Por ende, cada punto de (a,b) sería un punto crítico (pues $f'(x)=0$). Lo que contradice la unicidad de x_0.

Se tienen las siguientes posibilidades:

Caso $x_m\in(a,b)$ *y* $x_M\in(a,b)$: El Teorema de Fermat implica que $x_m,x_M\in(a,b)$ son puntos críticos. Así en (a,b) habría al menos dos puntos críticos distintos. Por lo tanto, este caso no puede ocurrir.

Caso $x_m\in\{a,b\}$ *y* $x_M\in\{a,b\}$: Este caso es equivalente a $x_m=a$ y $x_M=b$ o bien $x_m=b$ y $x_M=a$. Supongamos que $x_m=a$ y $x_M=b$. Por hipótesis tenemos que

$$f(a)=f(x_m)\le f(x_0)\le \min\{f(a),f(b)\}=f(a).$$

Aplicando el Teorema de Rolle a f en $[a,x_0]$ resulta que existe en (a,x_0) un punto crítico distinto de x_0.

Supongamos ahora que $x_m=b$ y $x_M=a$. De nuevo, por hipótesis tenemos que

$$f(b)=f(x_m)\le f(x_0)\le \min\{f(a),f(b)\}=f(b).$$

Usando otra vez el Teorema de Rolle concluimos que existe en (x_0, b) un punto crítico distinto de x_0.

En ambos casos obtenemos una contradicción de la unicidad de x_0. De modo que este caso tampoco es posible.

Caso $x_m \in \{a, b\}$ y $x_M \in (a, b)$: Ya que $x_m \in \{a, b\}$, entonces $f(x_m) = \text{mín}\{f(a), f(b)\}$. Por otra parte, $x_M \in (a, b)$ implica que $x_M = x_0$, pues x_M es un punto crítico (por el Teorema de Fermat) y x_0 es el único punto crítico en (a, b). Por lo tanto

$$f(x_M) = f(x_0) \leq \text{mín}\{f(a), f(b)\} = f(x_m).$$

Lo que es una contradicción, pues f sería constante y cada punto de (a, b) sería un punto crítico.

De esta manera, hemos verificado que la única posibilidad es el siguiente caso.

Caso $x_m \in (a, b)$ y $x_M \in \{a, b\}$: Por la unicidad de x_0 se sigue (del Teorema de Fermat) que $x_0 = x_m$ y que el punto máximo se alcanza en los extremos del intervalo $[a, b]$. ■

Otro criterio bastante útil es el que presentamos a continuación.

Teorema 6 (Criterio NC) *Sea $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ diferenciable en (a, ∞) con un único punto crítico $x_0 \in (a, \infty)$.*
(i) Si $\text{lím}_{x \downarrow a} f(x) = \infty$ y $\text{lím}_{x \to \infty} f(x) = \infty$, entonces x_0 es un punto mínimo global.
(ii) Si $\text{lím}_{x \downarrow a} f(x) = -\infty$ y $\text{lím}_{x \to \infty} f(x) = -\infty$, entonces x_0 es un punto máximo global.

Demostración. Veremos cómo se hace el caso (i), el caso (ii) es similar. Puesto que $\text{lím}_{x \downarrow a} f(x) = \infty$, entonces existe un $\delta > 0$ suficientemente pequeño para el cual

$$f(x) > |f(x_0)| + 1, \quad \forall x \in (a, a + \delta). \tag{4.1}$$

Ahora usando que $\text{lím}_{x \to \infty} f(x) = \infty$, obtenemos un número $M > 0$ suficientemente grande para el cual

$$f(x) > |f(x_0)| + 1, \quad \forall x \in (M, \infty). \tag{4.2}$$

Esto implica que $x_0 \in (a + \delta/2, M + 1)$ y además

$$f(x_0) \leq \text{mín}\left\{f\left(a + \frac{\delta}{2}\right),\ f(M + 1)\right\}.$$

Por lo tanto, podemos aplicar el inciso (i) del Teorema 5 a la función f : $[a+\delta/2, M+1] \to \mathbb{R}$. Así, x_0 es el mínimo global de f en $[a+\delta/2, M+1]$. De (4.1) y (4.2) se sigue que x_0 es el mínimo global de f en (a,∞). ■

En la aplicación del **Criterio NC** es conveniente tener presente el siguiente resultado (ver el Teorema 4.28 de [5]).

Teorema 7 (i) *Supongamos que* $\lim_{x\downarrow a} f(x) = \infty$.
$(i.a)$ *Si* $\lim_{x\downarrow a} g(x) = c$, *entonces* $\lim_{x\downarrow a} [f(x) + g(x)] = \infty$.
$(i.b)$ *Si* $\lim_{x\downarrow a} g(x) = c > 0$, *entonces* $\lim_{x\downarrow a} [f(x)g(x)] = \infty$.
(ii) *Supongamos que* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
$(ii.a)$ *Si* $\lim_{x\to\infty} g(x) = c$, *entonces* $\lim_{x\to\infty} [f(x) + g(x)] = \infty$.
$(ii.b)$ *Si* $\lim_{x\to\infty} g(x) = c > 0$, *entonces* $\lim_{x\to\infty} [f(x)g(x)] = \infty$.

Demostración. Trataremos sólo la parte (i). Sea $M > 0$.
$(i.a)$. Puesto que $\lim_{x\downarrow a} f(x) = \infty$, entonces existe un $\delta_1 > 0$ tal que

$$f(x) > M + |c| + 1, \quad \forall x \in (a, a+\delta_1). \tag{4.3}$$

Por otra parte, $\lim_{x\downarrow a} g(x) = c$ implica que existe un $\delta_2 > 0$ tal que $|g(x) - c| < 1$, para cada x en $(a, a+\delta_2)$. De esto deducimos que

$$g(x) > c - 1, \quad \forall x \in (a, a+\delta_2). \tag{4.4}$$

Si tomamos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces (4.3) y (4.4) implican

$$f(x) + g(x) > M + |c| + 1 + c - 1 = M + |c| - c \geq M, \quad \forall x \in (a, a+\delta).$$

Lo cual significa que $f(x) + g(x)$ se puede hacer tan grande como se quiera tomando x cercano a a, por la derecha (es decir, $x > a$).
$(ii.b)$ Procediendo como el caso anterior obtenemos $\delta_1, \delta_2 > 0$, tales que

$$f(x) > \frac{2}{c}M, \quad \forall x \in (a, a+\delta_1), \tag{4.5}$$

$$|g(x) - c| < \frac{c}{2}, \quad \forall x \in (a, a+\delta_2). \tag{4.6}$$

La desigualdad (4.6) implica que $g(x) > c/2$, para cada x en $(a, a+\delta_2)$. De esto y (4.5) concluimos que

$$f(x)g(x) > \frac{2}{c}M \times \frac{c}{2} = M, \quad \forall x \in (a, a+\delta),$$

donde $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Así $f(x)g(x)$ se puede hacer tan grande como se quiera tomando x cercano a a, por la derecha. ■

Parte II

Planteamiento y solución de problemas

Capítulo 5

Problemas de máximos y mínimos

"*Un problema es una oportunidad para que hagas tu mejor esfuerzo*"
Duke Ellington

En esta parte le proponemos al lector problemas de optimización y un método para resolverlos.

5.1. Planteamiento de problemas

Algunos de los problemas que se estudiarán tienen un tinte práctico, es decir, son problemas en los que ellos o bien una modificación de éstos pueden ocurrir en la vida cotidiana. Cabe mencionar que hay una gran variedad de problemas de optimización, aquí hemos escogido una pequeña muestra representativa de este género. Cuando se estudia la solución de un problema real por medio de alguna herramienta matemática se dice que se está modelando matemáticamente. La expresión matemática que relaciona a la cantidad de interés es el modelo matemático del problema real. En nuestro caso la expresión matemática será una función. Otra expresión frecuentemente usada es la de una ecuación diferencial.

En particular, cuando el problema estudiado involucra determinar para qué valor se obtiene el mejor resultado posible se le llama problema de optimización. Debido a que estos problemas conllevan a determinar para qué valor se alcanza un máximo o un mínimo también se llaman problemas de máximos y mínimos.

En general, para resolver problemas de optimización es conveniente seguir los siguientes pasos.

Paso I (Planteamiento del problema): Identificar las variables y cantidades de interés. A las variables hay que asignarles literales, y si es conveniente hay que hacer un "buen" dibujo que indique la dependencia entre ellas.

Paso II (Planteamiento del modelo): Expresar la función objetivo en términos de las variables necesarias. Es decir, hay una cantidad que interesa ser econtrada y hay que expresarla en términos de las variables ya existentes o bien, si es necesario, introducir otras nuevas. En seguida, hay que expresar la función de interés en términos de una sola variable. En este paso suele ser de mucha ayuda el dibujo que se realizó en la primera parte, y éste será bueno en la medida que nos permita ver las dependencias entre las variables. Así, el resultado de este paso debe ser el dominio I (que será un subconjunto de los números reales, $I \subset \mathbb{R}$) y la regla de correspondencia que define a la función objetivo (o de interés), f.

Paso III (Determinación de los extremos): Sea $f : I \to \mathbb{R}$ la función objetivo obtenida en el paso II. Ahora, encontramos los puntos críticos de f; para ello, debemos resolver la ecuación $f'(x) = 0$. Dependiendo del tipo de intervalo I, aplicamos uno de estos dos criterios:

Criterio C: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$, diferenciable en (a, b) y con un único punto crítico $x_0 \in (a, b)$.
(i) Si $f(x_0) \leq \text{mín}\{f(a), f(b)\}$, entonces x_0 es un punto mínimo global.
(ii) Si $f(x_0) \geq \text{máx}\{f(a), f(b)\}$, entonces x_0 es un punto máximo global.

Criterio NC: Sea $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ diferenciable en (a, ∞) con un único punto crítico $x_0 \in (a, \infty)$.

(i) Si $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, entonces x_0 es un punto mínimo global.
(ii) Si $\lim_{x \downarrow a} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$, entonces x_0 es un punto máximo global.

Por último debe verificarse que el resultado sea coherente con el planteamiento del problema.

Como veremos en seguida son los pasos I y II, es decir, entender el problema y trasladarlo al lenguaje matemático, los que suelen ser más difíciles de realizar. Una formación del lector basada sólo en fórmulas del Cálculo Diferencial unicamente le ayudará en el paso III. Así es que la moraleja con la que nos podemos quedar es que hay que entender y saber usar las herramientas matemáticas.

5.2. Un ejemplo

En lo que sigue vamos a considerar un problema típico donde el uso del Cálculo Diferencial (en especial de los criterios de máximos y mínimos) es muy conveniente para encontrar el valor óptimo. En este ejemplo, trataremos de hacer la mayor cantidad de detalles, sin embargo, esta práctica la omitiremos en los demás ejemplos, con la finalidad de que el lector asimile lo que aquí se vea.

Ejemplo 4 *Un terreno se encuentra a un lado de una calle y se desea cercar una parte rectangular de* 260 *metros cuadrados, de modo que la cerca construida mida* 1.5 *metros de alto. El lado del terreno cercado que colinda con la calle debe ser de ladrillos y los otros tres lados de malla. Si el metro cuadrado construido de ladrillos cuesta* \$500 *y el de malla* \$200*, ¿cuáles son las dimensiones del terreno que minimizan el costo de su cerca y cuál es el costo mínimo?.*

Solución. Paso I: Con la información proporcionada se tiene un esquema como el que aparece en la Figura 5.1. Donde x, y son cantidades en metros y representan el ancho y el largo del terreno, respectivamente. El área del lado construido de ladrillos es de $y(1.5)$ m^2, por lo tanto, el costo de este lado es

$$y(1.5)(500).$$

Por otra parte, el área de los otros tres lados es $(2x+y)(1.5)$ m^2, luego el costo de la cerca de malla será

$$(2x+y)(1.5)(200).$$

Entonces el costo total de la cerca es

$$C = y(1.5)(500) + (2x+y)(1.5)(200), \tag{5.1}$$

donde $x, y > 0$.

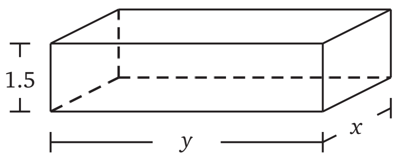


Figura 5.1

Paso II: La función de interés C depende de dos variables x, y. Para quitar esta dependencia recordamos que nos falta considerar que el terreno cercado debe medir 260 m^2, es decir

$$260 = xy.$$

Despejando y de la ecuación precedente obtenemos

$$y = \frac{260}{x} \tag{5.2}$$

y sustituyéndola en (5.1) nos queda

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{260}{x}(1.5)(500) + \left(2x + \frac{260}{x}\right)(1.5)(200) \\ &= 1.5\left[\frac{260}{x}(500) + \left(2x + \frac{260}{x}\right)(200)\right] \\ &= 600\left[x + \frac{455}{x}\right]. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Así hemos encontrado la función $C : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ que nos interesa estudiar.

Paso III: Ahora derivaremos la función C indicando en cada paso el número de la fórmula del Cuadro 3.1 que se usa:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(600\left[x+455x^{-1}\right]\right) &= 600\frac{d}{dx}\left(x+455x^{-1}\right) \quad \text{(por 3)}\\
&= 600\left[\frac{d}{dx}(x)+\frac{d}{dx}\left(455x^{-1}\right)\right] \quad \text{(por 4)}\\
&= 600\left[1+455\frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right)\right] \quad \text{(por 2 y 3)}\\
&= 600\left[1-455x^{-2}\right] \quad \text{(por 6).}
\end{aligned}$$

Igualamos a cero la derivada para encontrar los puntos críticos

$$\begin{aligned}
600\left[1-455x^{-2}\right]=0 \quad &\Rightarrow \quad 1-455x^{-2}=0\\
&\Rightarrow \quad x^2=455.
\end{aligned}$$

Así $-\sqrt{455}$ y $\sqrt{455}$ son los puntos críticos. Pero el único punto crítico de C en su dominio $(0,\infty)$ es $\sqrt{455}$.

Para ver qué tipo de extremo es calculamos los límites

$$\lim_{x\downarrow 0} 600\left[\frac{455}{x}\right]=\infty, \quad \lim_{x\downarrow 0} 600x=0, \tag{5.4}$$

$$\lim_{x\to\infty} 600\left[\frac{455}{x}\right]=0, \quad \lim_{x\to\infty} 600x=\infty. \tag{5.5}$$

Del (5.4) y la parte $(i.a)$ del Teorema 7 tenemos que

$$\lim_{x\downarrow 0} 600\left[\frac{455}{x}+x\right]=\lim_{x\downarrow 0}\left(600\left[\frac{455}{x}\right]+600x\right)=\infty.$$

Análogamente, de (5.5) y la parte $(ii.a)$ del Teorema 7 resulta

$$\lim_{x\to\infty} 600\left[\frac{455}{x}+x\right]=\lim_{x\to\infty}\left(600\left[\frac{455}{x}\right]+600x\right)=\infty.$$

Por lo tanto, el **Criterio NC** implica que $\sqrt{455}$ es el mínimo global de C. De (5.3) tenemos que

$$\begin{aligned}
C(\sqrt{455}) &= 600\left[\sqrt{455}+\frac{455}{\sqrt{455}}\right]\\
&= 1,200\sqrt{455}=25,596.874.
\end{aligned}$$

De esta manera, el costo mínimo es de $\$25,597$, cuando las dimensiones del terreno son $\sqrt{455}=21.331$ metros de ancho y $\frac{260}{\sqrt{455}}=12.189$ metros de largo (ver (5.2)). ■

5.3. Problemas propuestos

Cuando sea conveniente recordaremos al inicio de cada subsección algunos resultados preliminares que es útil tener en mente para resolver los problemas de dicha subsección.

5.3.1. Problemas prácticos

Sin lugar a dudas, un hecho de uso frecuente será el Teorema de Pitágoras (ver la Figura 5.2): sean a, b los lados de un triángulo rectángulo y c su hipotenusa, entonces

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

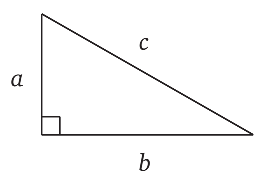


Figura 5.2

El volumen V de un cono circular recto de radio r y altura h es

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

La distancia g en la Figura 5.3 se llama generatriz.

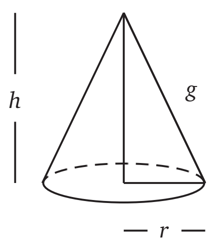


Figura 5.3

Problema 1 *Se desea hacer una caja con tapa cuyo volumen sea de* $72\ cm^3$*. Además, lo largo de la base debe ser el doble de lo ancho. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de modo que la superficie de la caja sea mínima? y ¿cuál la superficie mínima?*

Problema 2 *Se desea hacer un embudo cónico que tenga la generatriz igual a 20 cm. ¿Cuál debe ser la altura del embudo para que su volumen sea el mayor posible?*

Problema 3 *El perímetro de un triángulo isósceles es de* $10\ cm$*. ¿Cuánto deben medir sus lados para que el volumen del cuerpo generado por la rotación del triángulo en torno a su base sea el mayor posible?*

Problema 4 *Un tronco de un árbol de* $30\ m$ *de largo tiene forma de un cono circular truncado. El diámetro de la base es de* $1.6\ m$ *y el diámetro de la punta es de* $0.8\ m$*. Se desea cortar una viga de sección transversal cuadrada cuyo eje coincida con el eje del tronco y cuyo volumen sea el mayor posible. ¿Qué dimensiones debe tener la viga?*

Problema 5 *Una bodega de* $5\ m$ *de largo,* $4\ m$ *de ancho y* $3\ m$ *de alto, tiene un contacto en una esquina a* $80\ cm$ *de alto. Si se requiere colocar un foco en el techo justo en la esquina opuesta, ¿cuál es la trayectoria rectilínea sobre las paredes de la bodega que se debe seguir para ahorrar cable eléctrico?*

5.3.2. Problemas de velocidades

La velocidad (media o promedio) de un objeto es la distancia recorrida por unidad de tiempo, en símbolos

$$v = \frac{s}{t}, \tag{5.6}$$

donde v es la velocidad y t es el tiempo que tardó el objeto en recorrer la distancia s.

Frecuentemente aparecerán expresiones como 45.257 horas, para expresarlas a términos de horas, minutos y segundos se usa una regla de tres:

$$\begin{array}{ccc} 1 \text{ hora} & : & 60 \text{ minutos} \\ 0.257 \text{ horas} & : & x \end{array} \tag{5.7}$$

entonces $x = 60(0.257) = 15.42$, además

$$\begin{array}{ccc} 1 \text{ minuto} & : & 60 \text{ segundos} \\ 0.42 \text{ minutos} & : & x \end{array}$$

por lo tanto $x = 60(0.42) = 25.2$. De esta manera, 45.257 horas es aproximadamente 45 horas con 15 minutos y 25 segundos.

Problema 6 *Un barco encalló a* 9 *km del punto* P *más próximo de una costa con forma de línea recta. Se necesita enviar un mensajero a un pueblo situado en la orilla de la costa a* 15 *km de* P. *Teniendo en cuenta que el mensajero recorre a pie* 5 *km por hora, y en una barca a* 4 *km por hora, decir en qué punto de la orilla debe desembarcar para llegar al pueblo lo más pronto posible.*

Problema 7 *Tres puntos A, B y C están situados de modo que el ángulo entre los segmentos AB y BC es de* 60^0. *Un automóvil sale del punto A hacia el punto B a* 80 *km por hora y en el mismo momento del punto B parte un tren hacia el punto C a* 50 *km por hora. Si la distancia entre el punto A y el punto B es de* 200 *km, ¿en qué momento, al comenzar el movimiento, será mínima la distancia entre el automóvil y el tren?*

Problema 8 *A las* 2 : 00 *PM sale un bote, de cierto muelle, hacia el norte con una velocidad de* 20 *km por hora. Otro bote, cuyo destino es este muelle, se acerca por el este a* 15 *km por hora y llega a las* 3 : 00 *PM. ¿A qué tiempo estarán los botes lo más cerca entre ellos?*

Problema 9 *Sea* P *el punto, en una playa recta, más cercano a una isla que está a* 60 *km. Para llegar de la isla al poblado más próximo que está a* 200 *km de* P *se usa un pequeño barco y un autobús. La velocidad del barco es de* 40 *km por hora y la del autobús* 90 *km por hora. El costo por hora del uso del barco es de* \$2,000 *y el costo del uso del autobús es de* \$1,500 *por hora. ¿En qué punto debe construirse la central de autobuses para que los costos sean mínimos?*

Problema 10 *Una carretera A que va de sur a norte y otra carretera B que va de oeste a este se cruzan en un punto* P. *A las* 10 : 00 *AM un automóvil pasa por* P *viajando hacia el norte sobre A a* 80 *km por hora. En ese mismo momento, un avión que vuela hacia el este a* 320 *km por hora y a una altura de* 8.5 *km, pasa exactamente por arriba de un punto de la carretera B que se encuentra* 160 *km al oeste de* P. *Suponiendo que el automóvil y el avión mantienen la misma velocidad y dirección, ¿a qué tiempo se encontrarán más cerca uno del otro?*

5.3.3. Problemas geométricos

En esta parte abordaremos problemas en los que por lo general se pide dibujar cierta figura conteniendo otra ya dada (circunscribir), o al revés dada una figura dibujar otra dentro de ella (inscribir).

Recordemos que el volumen V de un cilindro circular recto (ver la Figura 5.4) de radio r y altura h es

$$V = \pi r^2 h. \tag{5.8}$$

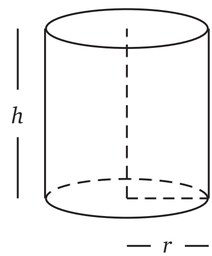


Figura 5.4

Problema 11 *Encontrar el trapecio de máxima área inscrito en un semicírculo de radio* 10 cm.

Problema 12 *Hallar la altura del cilindro que tenga el volumen máximo posible y que sea susceptible de ser inscrito en una esfera de radio* 25 cm.

Problema 13 *Inscribir un triángulo isósceles de área máxima en una circunferencia de radio* 15 cm.

Problema 14 *Circunscribir un triángulo isósceles de área mínima en una circunferencia de radio* 15 cm.

Problema 15 *En un triángulo de lados* 16 cm, 12 cm *y* 8 cm *inscribir el rectángulo de mayor área posible de modo que uno de sus lados coincida con el lado de* 16 cm *del triángulo.*

5.3.4. Problemas variados

La ecuación de la elipse con centro en $(0,0)$, eje mayor paralelo al eje y y semiejes a y b es

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1. \tag{5.9}$$

Su gráfica aparece en la Figura 5.5.

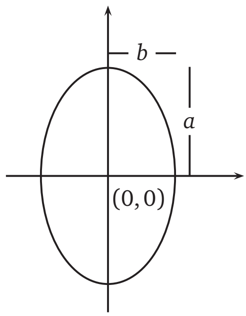


Figura 5.5

Problema 16 *¿Qué número positivo sumado al cuadrado de su inverso multiplicativo da lugar a la suma mínima?.*

Problema 17 *Encontrar la recta de modo que pase por el punto* $(-1,4)$ *y que la suma de las longitudes del segmento negativo y positivo que se obtienen al cortar dicha recta con el eje de las abscisas y con el eje de las ordenadas sea la menor posible.*

Problema 18 *Los puntos* $A=(1,4)$ *y* $B=(3,0)$ *están sobre la elipse* $2x^2+y^2=18$*. Hallar el tercer punto* C *sobre la elipse tal que el área del triángulo* ABC *sea la mayor posible.*

Problema 19 *Un fabricante de ensaladas sabe que si vende a* $\$20$ *cada ensalada, entonces venderá* 180 *ensaladas al día. Por cada peso que aumenta al precio de las ensaladas vende* 9 *ensaladas menos al día. Si el costo en la elaboración de una ensalada es de* $\$13$*, ¿a qué precio de venta es máxima la ganancia diaria que obtiene el fabricante?*

Problema 20 *Se tiene un cartón de 20 cm de largo por 15 cm de ancho. Se quiere hacer una caja con tapa, ¿cuál ha de ser la altura de la caja para que el volumen sea máximo?*

Capítulo 6

Solución a los problemas prácticos

"*Elige un trabajo que te guste y no tendrás que trabajar ni un día de tu vida*"
Confucio

Problema 1 *Se desea hacer una caja con tapa cuyo volumen sea de* $72\ cm^3$. *Además, lo largo de la base debe ser el doble de lo ancho. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de modo que la superficie de la caja sea mínima? y ¿cuál la superficie mínima?*

Solución. Las literales x, y, z denotarán respectivamente lo largo, lo ancho y lo alto de la caja, dadas en centímetros. Un esquema de la caja se aprecia en la Figura 6.1. La superficie de la caja es

$$S = 2(xy + xz + yz).$$

Las variables x, y, z son positivas y la función S claramente depende de ellas. Para hacer que S dependa de una variable usaremos las restricciones que nos impone el problema. La primera es que lo largo de la base

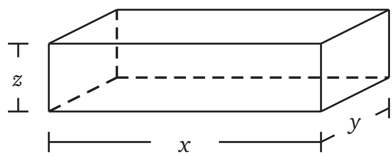


Figura 6.1

debe ser el doble de lo ancho, es decir,

$$y = 2x. \tag{6.1}$$

La segunda es que el volumen de la caja debe ser 72 cm^3, por lo tanto,

$$72 = \text{Volumen} = xyz = x(2x)z,$$

en la última igualdad hemos usado (6.1). Despejamos z,

$$z = \frac{72}{2x^2}. \tag{6.2}$$

Obtenemos así la función $S : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, donde

$$\begin{aligned} S(x) &= 2\left(x(2x) + x\frac{72}{2x^2} + (2x)\frac{72}{2x^2}\right) \\ &= 4\left(x^2 + \frac{54}{x}\right). \end{aligned} \tag{6.3}$$

La derivada de S es

$$\frac{d}{dx}\left(4\left[x^2 + 54x^{-1}\right]\right) = \frac{8}{x^2}\left(x^3 - 27\right).$$

Igualamos la derivada de S a cero para encontrar sus puntos críticos

$$\frac{8}{x^2}\left(x^3 - 27\right) = 0 \Rightarrow x^3 = 27.$$

De aquí vemos que $x = 3$ es el único punto crítico. Puesto que

$$\lim_{x \downarrow 0} 4\left(x^2 + \frac{54}{x}\right) = \infty, \quad \lim_{x \to \infty} 4\left(x^2 + \frac{54}{x}\right) = \infty,$$

el **Criterio NC** implica que $x = 3$ es el mínimo global de S. Así, de (6.1) y de (6.2) resulta

$$y = 2(3) = 6, \ \ z = \frac{72}{2(3)^2} = 4.$$

Además, de (6.3) obtenemos

$$S(3) = 4\left((3)^2 + \frac{54}{3}\right) = 108.$$

Por lo tanto, la superficie mínima de la caja es de 108 cm^2 y sus dimensiones son largo 3 cm, ancho 6 cm y alto 4 cm. ■

Problema 2 *Se desea hacer un embudo cónico que tenga la generatriz igual a 20 cm. ¿Cuál debe ser la altura del embudo para que su volumen sea el mayor posible?*

Solución. Sean h, r, g la altura, el radio y la generatiz en centímetros del cono, respectivamente. Tenemos un esquema como el de la Figura 6.2.

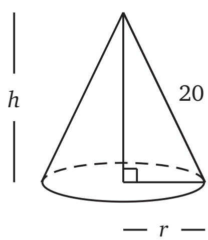


Figura 6.2

La cantidad que nos interesa es el volumen V del cono, el cual es

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h. \tag{6.4}$$

Aplicando el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo que aparece en la Figura 6.2 obtenemos

$$h^2 + r^2 = 20^2. \tag{6.5}$$

De aquí vemos en particular que

$$h^2 \leq h^2 + r^2 = 20^2,$$

por lo tanto, $h \in [0, 20]$. Por otra parte, despejando r^2 de (6.5) y sustituyéndola en (6.4) nos queda $V : [0, 20] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} V(h) &= \frac{1}{3}\pi(20^2 - h^2)h \\ &= \frac{400}{3}\pi h - \frac{1}{3}\pi h^3. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Derivando V,

$$\frac{d}{dh}\left(\frac{400}{3}\pi h - \frac{1}{3}\pi h^3\right) = \frac{400}{3}\pi - \pi h^2$$

e igualando su derivada a cero

$$\frac{400}{3}\pi - \pi h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{400}{3}$$

vemos que los puntos críticos son $-\frac{20}{\sqrt{3}}$ y $\frac{20}{\sqrt{3}}$. Pero el único punto crítico en el dominio de V es $\frac{20}{\sqrt{3}}$. Además, de (6.6) obtenemos

$$V(0) = 0, \quad V(20) = 0, \quad V\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right) = 3,224.5,$$

por lo tanto,

$$V\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right) \geq \text{máx}\{V(0), V(20)\}.$$

El **Criterio C** implica que una altura de $\frac{20}{\sqrt{3}} = 11.547\ cm$ produce el máximo volumen del cono. ∎

Problema 3 *El perímetro de un triángulo isósceles es de* 10 cm. *¿Cuánto deben medir sus lados para que el volumen del cuerpo generado por la rotación del triángulo en torno a su base sea el mayor posible?*

Solución. Sea x la longitud de la base y sea y la longitud de los otros dos lados del triángulo isósceles. Las cantidades $x, y \geq 0$ están dadas en centímetros y en la Figura 6.3 (a) aparece el triángulo con los lados indicados.

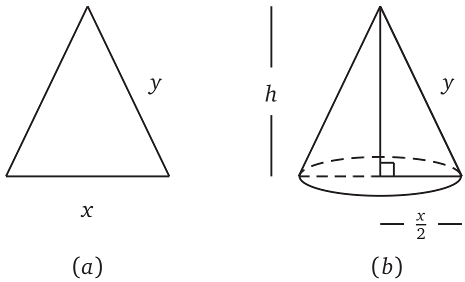


Figura 6.3

El objeto que se obtiene al girar el triángulo isósceles es un cono de generatriz y y radio $x/2$, como el que se presenta en la Figura 6.3 (b). Sea h la altura del cono, entonces su volumen será

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 h. \tag{6.7}$$

La función V depende de dos variables, para eliminar una de ellas de la Figura 6.3 (b) notamos que podemos usar el Teorema de Pitágoras para obtener la relación

$$h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = y^2,$$

entonces

$$h = \sqrt{y^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} \tag{6.8}$$

y

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 \leq h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = y^2 \Rightarrow \frac{x}{2} \leq y. \tag{6.9}$$

Por otra parte, tenemos que el perímetro del triángulo isósceles debe ser 10 cm, esto implica que

$$10 = x + 2y. \tag{6.10}$$

De esto y (6.9) deducimos

$$2x = x + x \leq x + 2y = 10 \Rightarrow x \leq 5. \tag{6.11}$$

Además, de (6.7), (6.8) y (6.10) obtenemos

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}x\right)^2\sqrt{y^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}x\right)^2\sqrt{\left(\frac{10-x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{12}\pi x^2\sqrt{5-x}. \end{aligned}$$

De (6.11) se sigue que el dominio de V es $[0,5]$. Derivamos la función V,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{5}}{12}\pi x^2\sqrt{5-x}\right) = -\frac{5\sqrt{5}}{24}\pi x\frac{x-4}{\sqrt{5-x}},$$

e igualamos a cero su derivada

$$-\frac{5\sqrt{5}}{24}\pi x\frac{x-4}{\sqrt{5-x}} = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0.$$

Así, 0 y 4 son puntos críticos en $[0,5]$, pero el único punto crítico en $(0,5)$ es 4, además

$$V(0) = 0, \quad V(5) = 0, \quad V(4) = 9.366,$$

implica que

$$V(4) \geq \text{máx}\{V(0), V(5)\}.$$

Del **Criterio C** se sigue que el máximo volumen se obtiene cuando la base del triángulo isósceles es de $x = 4\ cm$ y los lados miden $y = 3\ cm$ (ver (6.10)). ■

Problema 4 *Un tronco de un árbol de* 30 *m de largo tiene forma de un cono circular truncado. El diámetro de la base es de* 1.6 *m y el diámetro de la punta es de* 0.8 *m. Se desea cortar una viga de sección transversal cuadrada cuyo eje coincida con el eje del tronco y cuyo volumen sea el mayor posible. ¿Qué dimensiones debe tener la viga?*

Solución. Con la información proporcionada hacemos el esquema de la Figura 6.4 (a). Sean b la base y h la altura en metros de la viga rectangular con base cuadrada. El volumen de dicha viga será

$$V = b^2h.$$

Ahora representemos estos datos en el plano cartesiano, como se ve en la Figura 6.4 (b). Nótese que los puntos $(0.4, 30)$ y $(0.8, 0)$ nos determinan la línea recta L,

$$\frac{y-30}{x-0.4} = \frac{0-30}{0.8-0.4} \Rightarrow y(x) = 30 - 75(x-0.4) = 60 - 75x.$$

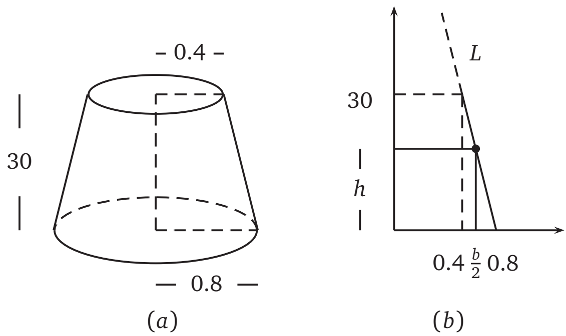


Figura 6.4

Puesto que el punto $(b/2, h)$ está sobre la línea recta L, entonces

$$h = y\left(\frac{b}{2}\right) = 60 - 75\frac{b}{2}. \tag{6.12}$$

Por lo tanto,

$$V(b) = b^2\left(60 - 75\frac{b}{2}\right).$$

Además, el diámetro de la punta del tronco es de 0.8 y el de la base 1.6, entonces $0.8 \leq b \leq 1.6$. Así, $V : [0.8, 1.6] \to \mathbb{R}$ con derivada

$$\frac{d}{db}\left(b^2\left(60 - 75\frac{b}{2}\right)\right) = -\frac{15}{2}b\,(15b - 16).$$

Igualamos a cero la derivada de V para encontrar sus puntos críticos

$$-\frac{15}{2}b\,(15b - 16) = 0.$$

Así, 0 y $\frac{16}{15}$ son sus puntos críticos, pero el único punto crítico en $(0.8, 1.6)$ es $\frac{16}{15} = 1.066$. Además,

$$V(0.8) = 19.2, \quad V(1.6) = 0, \quad V\left(\frac{16}{15}\right) = 22.756,$$

entonces

$$V\left(\frac{16}{15}\right) \geq \text{máx}\,\{V(0.8), V(1.6)\}.$$

El **Criterio C** implica que el volumen máximo se obtiene cuando la base cuadrada de la viga es de 1.066 m y una altura de 20 m (ver (6.12)). ■

Problema 5 *Una bodega de* 5 m *de largo,* 4 m *de ancho y* 3 m *de alto, tiene un contacto en una esquina a* 80 cm *de alto. Si se requiere colocar un foco en el techo justo en la esquina opuesta, ¿cuál es la trayectoria rectilínea sobre las paredes de la bodega que se debe seguir para ahorrar cable eléctrico?*

Solución. Sea P el punto en la esquina que forman los lados de longitud 5 m y 4 m. Denotemos por x la altura en metros, a partir de los 0.8 m, del punto P como se aprecia en la Figura 6.5.

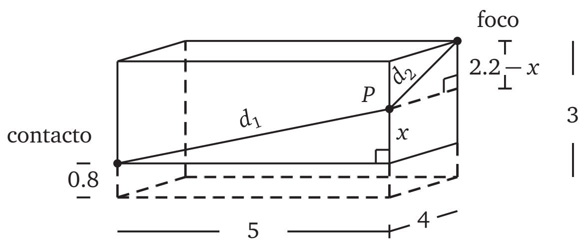


Figura 6.5

Sea d_1 la distancia del contacto al punto P y sea d_2 la distancia del punto P al foco. La distancia que nos interesa minimizar es

$$d = d_1 + d_2.$$

Usando el Teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos apropiados tenemos que

$$d_1 = \sqrt{5^2 + x^2} \ \text{ y } \ d_2 = \sqrt{4^2 + (3 - (0.8 + x))^2}.$$

Puesto que la altura de la bodega es de 3 m, entonces $0 \leq x \leq 2.2$. Así, $d : [0, 2.2] \to \mathbb{R}$ y está dada por

$$d(x) = \sqrt{5^2 + x^2} + \sqrt{4^2 + (2.2 - x)^2}.$$

Derivamos la función d,

$$
\begin{aligned}
&= \frac{0.2}{\sqrt{x^2+25}\sqrt{x^2-4.4x+20.84}} \\
&\quad \times \left((5x-11)\sqrt{x^2+25}+5x\sqrt{x^2-4.4x+20.84}\right).
\end{aligned}
$$

La derivada de d será igual a cero si

$$
\begin{gathered}
(5x-11)\sqrt{x^2+25}+5x\sqrt{x^2-4.4x+20.84}=0, \\
5x\sqrt{x^2-4.4x+20.84}=(11-5x)\sqrt{x^2+25}, \\
(5x)^2\left(x^2-4.4x+20.84\right)=(25x^2-110x+121)\left(x^2+25\right), \\
25x^4-110x^3+521x^2=25x^4-110x^3+746x^2-2,750x+3,025, \\
225x^2-2,750x+3,025=0, \\
25\,(9x-11)\,(x-11)=0.
\end{gathered}
$$

Por lo tanto, los puntos críticos son $\frac{11}{9}$ y 11. Sólo $\frac{11}{9}=1.222$ está en $(0,2.2)$ y además

$$
d(0)=9.565, \quad d(2.2)=9.462, \quad d\,(1.222)=9.265,
$$

implica que

$$
d\,(1.222)\leq \text{mín}\,\{d(0),d(2.2)\}\,.
$$

Del **Criterio C** resulta que el cable eléctrico lo debemos pasar por el punto P colocado a 2 m del suelo $(0.8+1.222=2.022)$ para obtener el mayor ahorro. ■

Capítulo 7

Solución a los problemas de velocidades

“*Lo importante es esto: ser capaz en cualquier momento de sacrificar lo que somos para ser lo que podemos ser*”

Pearl S. Buck

Problema 6 *Un barco encalló a 9 km del punto P más próximo de una costa con forma de línea recta. Se necesita enviar a un mensajero a un pueblo situado en la orilla de la costa a 15 km de P. Teniendo en cuenta que el mensajero recorre a pie 5 km por hora, y en una barca a 4 km por hora, decir en qué punto de la orilla debe desembarcar para llegar al pueblo lo más pronto posible.*

Solución. Sean x, y las distancias en *km* que el mensajero camina y rema, respectivamente. Con estas variables y la información del problema se hace el esquema de la Figura 7.1. De la fórmula (5.6) deducimos que al mensajero le llevará $\frac{y}{4}$ horas remar la distancia y y $\frac{x}{5}$ horas caminar la distancia x. Por lo tanto, el tiempo total será

$$T = \frac{x}{5} + \frac{y}{4}.$$

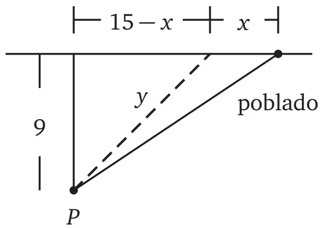


Figura 7.1

Por otra parte, de la Figura 7.1 vemos que $0 \leq x \leq 15$ y del Teorema de Pitágoras resulta

$$y^2 = 9^2 + (15 - x)^2.$$

Por ende, la función $T : [0, 15] \to \mathbb{R}$ está dada por

$$T(x) = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{9^2 + (15 - x)^2}}{4}.$$

Derivamos la función T,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{5} + \frac{\sqrt{9^2 + (15 - x)^2}}{4}\right) = \frac{1}{20}\,\frac{5x + 4\sqrt{x^2 - 30x + 306} - 75}{\sqrt{x^2 - 30x + 306}}.$$

La derivada de T será cero si

$$\begin{aligned} 5x + 4\sqrt{x^2 - 30x + 306} - 75 &= 0, \\ 4\sqrt{x^2 - 30x + 306} &= 75 - 5x, \\ 4^2\left(x^2 - 30x + 306\right) &= (75 - 5x)^2, \\ 16x^2 - 480x + 4,896 &= 25x^2 - 750x + 5,625, \\ 9x^2 - 270x + 729 &= 0, \\ 9(x - 3)(x - 27) &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los puntos críticos son 3 y 27. El único valor en $(0, 15)$ es 3 y además

$$T(0) = 4.373, \quad T(15) = 5.25, \quad T(3) = 4.35,$$

implica que

$$T(3) \leq \min\{T(0), T(15)\}.$$

Del **Criterio C** se concluye que el tiempo del recorrido será mínimo si el mensajero se baja de la barca 3 km antes de llegar al pueblo. ■

Problema 7 *Tres puntos A, B y C están situados de modo que el ángulo entre los segmentos AB y BC es de* 60^0*. Un automóvil sale del punto A hacia el punto B a* 80 *km por hora y en el mismo momento del punto B parte un tren hacia el punto C a* 50 *km por hora. Si la distancia entre el punto A y el punto B es de* 200 *km, ¿en qué momento, al comenzar el movimiento, será mínima la distancia entre el automóvil y el tren?*

Solución. Consideremos el esquema que se muestra en la Figura 7.2 (a). Sea t el tiempo en horas a partir de que el auto sale del punto A. Usando la fórmula (5.6) tenemos que después de t horas el auto se ha alejado $80t$ km del punto A y el tren se ha alejado $50t$ km del punto B. Colocando esta información en el plano cartesiano construimos la Figura 7.2 (b).

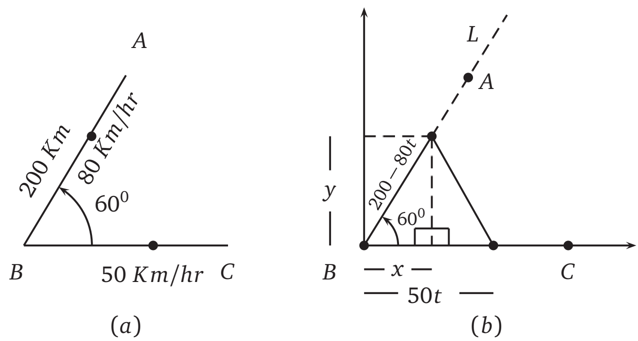


Figura 7.2

La recta L de la Figura 7.2 (b) pasa por el origen y tiene pendiente $m = \tan 60^0 = \tan \frac{\pi}{3}$, por lo tanto su ecuación es

$$y = \left(\tan \frac{\pi}{3}\right) x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{7.1}$$

Sea (x, y) el punto sobre la recta L que dista del origen en $200 - 80t$. El Teorema de Pitágoras nos permite concluir que

$$x^2 + y^2 = (200 - 80t)^2. \tag{7.2}$$

De nuevo, usando el Teorema de Pitágoras tenemos que la distancia del automóvil al tren es de

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{y^2+(50t-x)^2} \\ &= \sqrt{2,500t^2-100tx+x^2+y^2} \\ &= \sqrt{2,500t^2-100tx+(200-80t)^2}, \end{aligned} \tag{7.3}$$

en la última igualdad hemos usado (7.2). Por otra parte, sustituyendo el valor de (7.1) en (7.2) nos queda

$$\begin{aligned} (200-80t)^2 &= x^2+\left(\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)x\right)^2 \\ &= x^2\left[1+\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)^2\right]=\frac{x^2}{\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^2}, \end{aligned}$$

es decir,

$$x=(200-80t)\cos\frac{\pi}{3}. \tag{7.4}$$

Puesto que el automóvil se mueve a 80 km por hora y la distancia del punto A al punto B es de 200 km, entonces en 2.5 horas el carro habrá llegado a su destino (el punto B), esto implica que $0\leq t\leq 2.5$. Por lo tanto, sustituyendo (7.4) en (7.3) obtenemos la función $d:[0,2.5]\to\mathbb{R}$ dada por

$$d(t)=\sqrt{2,500t^2-100t\,(200-80t)\cos\frac{\pi}{3}+(200-80t)^2}.$$

La derivada de d es

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\sqrt{2,500t^2-100t\,(200-80t)\cos\frac{\pi}{3}+(200-80t)^2}\right) \\ &\quad=\frac{1,290t-2,100}{\sqrt{129t^2-420t+400}}. \end{aligned}$$

Al igualar la derivada de d a cero vemos que el único punto crítico es $\frac{2,100}{1,290}=\frac{70}{43}=1.627$. Además de

$$d(0)=200,\quad d(2.5)=125,\quad d\left(\frac{70}{43}\right)=76.249,$$

deducimos que

$$d\,(1.627) \leq \text{mín}\,\{d(0), d(2.5)\}\,.$$

El **Criterio C** implica que la distancia mínima se alcanza a las 1.627 horas de haber partido el carro del punto A. Usando (5.7), la respuesta es 1 hora con 37 minutos y 37 segundos. ■

Problema 8 *A las* $2:00$ PM *sale un bote, de cierto muelle, hacia el norte con una velocidad de* 20 km *por hora. Otro bote, cuyo destino es este muelle, se acerca por el este a* 15 km *por hora y llega a las* $3:00$ PM. *¿A qué tiempo estarán los botes lo más cerca entre ellos?*

Solución. El bote que se acerca por el este hace una hora en llegar al muelle, ya que él avanza a 15 km por hora y a las $2:00$ PM está a 15 km del muelle (ver la fórmula (5.6)). Sea t el tiempo en horas a partir de las $2:00$ PM.

Supongamos primero que $t \in [0,1]$. Usando de nuevo la fórmula (5.6) se deduce que después de $t \in [0,1]$ horas el bote con dirección al norte se ha alejado $20t$ km del muelle, mientras que el bote que se acerca por el este al muelle ha avanzado $15t$ km. Con esta información trazamos la Figura 7.3.

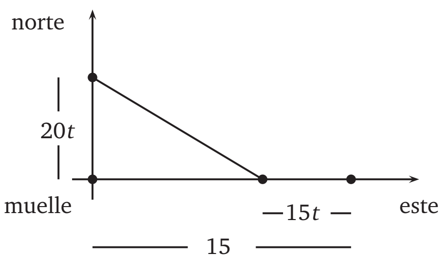


Figura 7.3

Del Teorema de Pitágoras resulta que la distancia entre los botes es

$$d(t) = \sqrt{(20t)^2 + (15 - 15t)^2}.$$

La derivada de $d : [0,1] \to \mathbb{R}$ es

$$\frac{d}{dt}\left(\sqrt{(20t)^2 + (15 - 15t)^2}\right) = \frac{125t - 45}{\sqrt{25t^2 - 18t + 9}},$$

por lo tanto, $\frac{45}{125} = \frac{9}{25} = 0.36$ es el único punto crítico de d. Por otra parte,

$$d(0) = 15, \quad d(1) = 20, \quad d\left(\frac{9}{25}\right) = 12,$$

implica que

$$d(0.36) \leq \text{mín}\{d(0), d(1)\}.$$

Del **Criterio C** se concluye que a las 0.36 horas estarán los botes a una distancia mínima de 12 km. Después de una hora, $t \in (1, \infty)$, la distancia entre los botes será de más de 20 km, puesto que el bote que se dirige al norte lleva una velocidad de 20 km por hora. Por lo tanto, usando (5.7) resulta que la distancia más corta es a los 21 minutos con 36 segundos después de las 2 : 00 PM. ■

Problema 9 *Sea P el punto, en una playa recta, más cercano a una isla que está a* 60 *km. Para llegar de la isla al poblado más próximo que está a* 200 *km de P se usa un pequeño barco y un autobús. La velocidad del barco es de* 40 *km por hora y la del autobús* 90 *km por hora. El costo por hora del uso del barco es de* \$2,000 *y el costo del uso del autobús es de* \$1,500 *por hora. ¿En qué punto debe construirse la central de autobuses para que los costos sean mínimos?*

Solución. Sea t el tiempo en horas y sean x, y la distancia en kilómetros que recorre el autobús y el barco, respectivamente. Con estos datos trazamos la Figura 7.4.

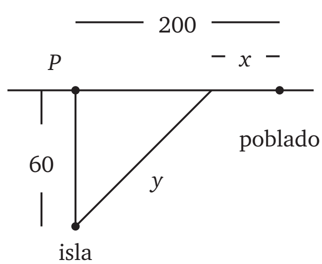


Figura 7.4

Nótese que $0 \leq x \leq 200$ y del Teorema de Pitágoras resulta

$$y^2 = 60^2 + (200 - x)^2. \tag{7.5}$$

De la fórmula (5.6) tenemos que el tiempo recorrido en barco es $\frac{y}{40}$ horas y el tiempo recorrido en el autobús es $\frac{x}{90}$ horas. Por lo tanto, el costo en miles de pesos para el trayecto es de

$$C = \frac{y}{40}2 + \frac{x}{90}1.5.$$

De (7.5) se tiene que la función $C : [0, 200] \to \mathbb{R}$ está dada por

$$C(x) = \frac{\sqrt{60^2 + (200-x)^2}}{20} + \frac{1}{60}x.$$

La derivada de C es

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{60^2 + (200-x)^2}}{20} + \frac{1}{60}x\right) = \frac{3x + \sqrt{x^2 - 400x + 43,600} - 600}{60\sqrt{x^2 - 400x + 43,600}}.$$

La derivada de C es cero si

$$\begin{aligned} 3x + \sqrt{x^2 - 400x + 43,600} - 600 &= 0, \\ \sqrt{x^2 - 400x + 43,600} &= 600 - 3x, \\ x^2 - 400x + 43,600 &= (600 - 3x)^2, \\ 8x^2 - 3,200x + 316,400 &= 0. \end{aligned}$$

Usando la fórmula general para ecuaciones de segundo grado vemos que los puntos críticos son $200 + 15\sqrt{2} = 221.213$ y $200 - 15\sqrt{2} = 178.786$. El único punto crítico en $(0, 200)$ es $200 - 15\sqrt{2}$ y además

$$C(0) = 10.44, \quad C(200) = 6.333, \quad C(178.786) = 6.161,$$

implica que

$$C\,(178.786) \leq \text{mín}\,\{C(0), C(200)\}\,.$$

Del **Criterio C** deducimos que 178.786 es el punto mínimo global, por lo tanto el costo mínimo se obtiene si se coloca la central a 178.786 *km* del poblado. ■

Problema 10 *Una carretera A que va de sur a norte y otra carretera B que va de oeste a este se cruzan en un punto P. A las* 10 : 00 *AM un automóvil pasa por P viajando hacia el norte sobre A a* 80 *km por hora. En ese mismo momento, un avión que vuela hacia el este a* 320 *km por hora y a una altura de* 8.5 *km, pasa exactamente por arriba de un punto de la carretera B que se encuentra* 160 *km al oeste de P. Suponiendo que el automóvil y el avión mantienen la misma velocidad y dirección, ¿a qué tiempo se encontrarán más cerca uno del otro?*

Solución. Sea t el tiempo en horas después de las 10 : 00 AM. Usando la fórmula (5.6) deducimos que en $\frac{160}{320} = \frac{1}{2}$ horas el avión llegará al punto P. Después de esto, tanto el avión como el automóvil se alejan el uno del otro. Por ende, la distancia mínima entre ellos es cuando $0 \leq t \leq 0.5$. De la fórmula (5.6) tenemos que después de t horas el auto se ha alejado $80t$ km del punto P y el avión ha avanzado $320t$ km hacia el punto P. Con esta información trazamos el esquema de la Figura 7.5.

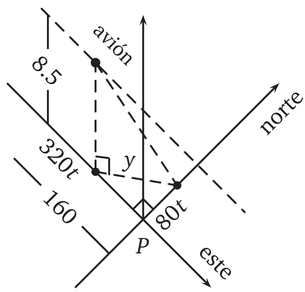


Figura 7.5

Sea y la distancia de la sombra del avión al automóvil. Usando el Teorema de Pitágoras tenemos que la distancia del avión al automóvil es

$$d = \sqrt{(8.5)^2 + y^2},$$

además,

$$y^2 = (160 - 320t)^2 + (80t)^2 .$$

De esta manera, la función distancia $d : [0, 0.5] \to \mathbb{R}$ es

$$d(t) = \sqrt{(80t)^2 + (160 - 320t)^2 + (8.5)^2}.$$

Derivamos la función d,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\sqrt{(80t)^2 + (160 - 320t)^2 + (8.5)^2}\right) \\ &= \frac{1.088 \times 10^5 t - 51,200}{\sqrt{1.088 \times 10^5 t^2 - 1.024 \times 10^5 t + 25,672}} \end{aligned}$$

e igualamos su derivada a cero. Por lo tanto, su único punto crítico es $\frac{51{,}200}{1.088\times 10^5} = \frac{8}{17} = 0.47059$. Por otra parte,

$$d(0) = 160.23, \quad d\left(\frac{1}{2}\right) = 40.893, \quad d\left(\frac{8}{17}\right) = 39.726,$$

entonces

$$d\left(\frac{8}{17}\right) \leq \text{mín}\left\{d(0), d\left(\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

El **Criterio C** implica que a las 0.47059 horas después de haber pasado el automóvil por el punto P se obtiene la distancia más cercana entre el avión y el automóvil. Usando (5.7) resulta que el tiempo buscado es a las diez de la mañana con veintiocho minutos y catorce segundos. ■

Capítulo 8

Solución a los problemas geométricos

"*La actitud es el portavoz de nuestro presente; es el profeta de nuestro futuro*"
John C. Maxwell

Problema 11 *Encontrar el trapecio de máxima área inscrito en un semicírculo de radio* 10 *cm.*

Solución. El trapecio de máxima área inscrito en el semicírculo se encontrará si el lado más grande del trapecio es el diámetro del semicírculo. Consideraremos la Figura 8.1. En dicha figura se forma un trapecio constituido por dos triángulos y un cuadrado. Por ende, el área del trapecio inscrito es

$$\begin{aligned} A &= \text{área del cuadrado } + \text{ área de los dos triángulos} \\ &= 2(10\cos\theta)\times 10\operatorname{sen}\theta + 2\left[\frac{(10\cos\theta - 10)\,10\operatorname{sen}\theta}{2}\right] \\ &= 100(1+\cos\theta)\operatorname{sen}\theta. \end{aligned}$$

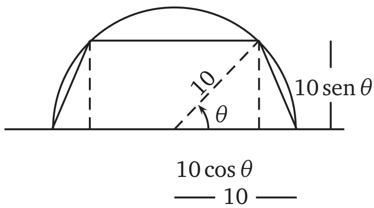


Figura 8.1

De la Figura 8.1 notamos también que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Calculemos la derivada de $A : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{d\theta}\left[100(1+\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\right] = 100(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1),$$

e igualémosla a cero

$$100(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1) = 0.$$

Haciendo $x = \cos\theta$ podemos factorizar la expresión anterior así

$$100\,(\cos\theta + 1)\,(2\cos\theta - 1) = 0.$$

De aquí vemos que los puntos críticos de A son $\cos^{-1}(-1){=}\pi$ y $\cos^{-1}(1/2)$ $=\frac{\pi}{3}$. El único punto crítico en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ es $\frac{\pi}{3}$. Además

$$A(0) = 0, \;\; A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 100, \;\; A\left(\frac{\pi}{3}\right) = 129.9,$$

implica que

$$A\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq \text{máx}\left\{A(0), A\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

Por lo tanto, del **Criterio C** deducimos que el área máxima se obtiene cuando el lado más pequeño del trapecio se dibuja a una altura de $10\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = 5\sqrt{3} = 8.660\ cm$. ■

Problema 12 *Hallar la altura del cilindro que tenga el volumen máximo posible y que sea susceptible de ser inscrito en una esfera de radio* $25\ cm$.

Solución. Sean r el radio y h la altura en centímetros del cilindro inscrito en la esfera de radio 25 cm. Con estos datos trazamos el esquema de la Figura 8.2.

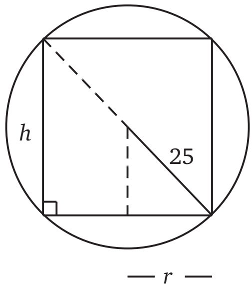


Figura 8.2

De (5.8) tenemos que el volumen del cilindro inscrito es

$$V = \pi r^2 h. \tag{8.1}$$

Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de altura h y base $2r$ nos queda

$$(2r)^2 + h^2 = (50)^2 \Rightarrow r^2 = \frac{1}{4}(50^2 - h^2). \tag{8.2}$$

Debido a que el cilindro debe estar inscrito en la esfera, entonces su altura h debe ser menor o igual a 50 cm. Sustituyendo (8.2) en (8.1) tenemos que la función $V : [0, 50] \to \mathbb{R}$ está dada por

$$V(h) = \frac{\pi}{4} h(50^2 - h^2).$$

Derivamos la función V,

$$\frac{d}{dh}\left(\frac{\pi}{4} h(50^2 - h^2)\right) = -\frac{1}{4}\pi\left(3h^2 - 2,500\right)$$

e igualando su derivada a cero vemos que $\sqrt{\frac{2,500}{3}} = \frac{50}{\sqrt{3}} = 28.868$ es el único punto crítico en $(0, 50)$. Para ver qué tipo de extremo es calculamos

$$V(0) = 0, \quad V(50) = 0, \quad V\left(\frac{50}{\sqrt{3}}\right) = 37,787.486,$$

entonces

$$V\left(\frac{50}{\sqrt{3}}\right) \geq \text{máx}\left\{V\left(0\right), V\left(50\right)\right\}.$$

Por el **Criterio C** resulta que $\frac{50}{\sqrt{3}}$ es un punto máximo global. Así, la altura del cilindro inscrito de volumen máximo es de 28.868 cm. ■

Problema 13 *Inscribir un triángulo isósceles de área máxima en una circunferencia de radio* 15 *cm.*

Solución. Consideremos los esquemas de la Figura 8.3.

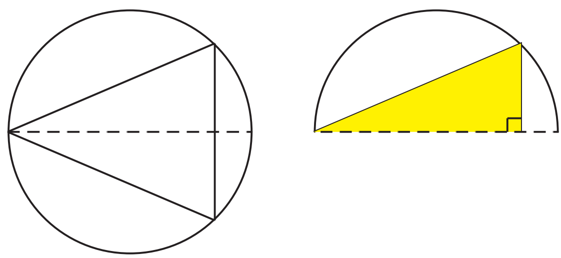


Figura 8.3

De estos dibujos podemos deducir que el problema de inscribir un triángulo isósceles de área máxima en un círculo es análogo a inscribir un triángulo rectángulo de área máxima en un semicírculo.

Para abordar esta nueva versión del problema usaremos que la semicircunferencia de radio 15 cm es la gráfica de la función

$$y(x) = \sqrt{15^2 - x^2}, \quad x \in (-15, 15). \tag{8.3}$$

Sean $(-15, 0)$, $(x, 0)$ y (x, y) los vértices del triángulo rectángulo como se indica en la Figura 8.4.

Nótese que la base del triángulo rectángulo tiene una longitud de $x - (-15)$ cm y la altura mide y cm. Por lo tanto, el área del triángulo es

$$A = \frac{(x+15)y}{2}.$$

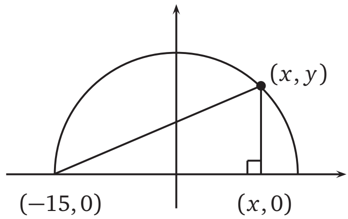


Figura 8.4

Puesto que el vértice del triángulo (x, y) está en el semicirculo podemos usar (8.3) para expresar la función $A : [-15, 15] \to \mathbb{R}$ como

$$A(x) = \frac{(15+x)\sqrt{15^2 - x^2}}{2}.$$

La derivada de la función A es

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(15+x)\sqrt{15^2 - x^2}}{2}\right) = -\frac{2x^2 + 15x - 225}{2\sqrt{225 - x^2}}.$$

La derivada de A es cero si y sólo si

$$0 = 2x^2 + 15x - 225 = (x+15)(2x-15),$$

entonces -15 y $\frac{15}{2}$ son los puntos críticos de A. Luego $\frac{15}{2}$ es el único punto crítico en $(-15, 15)$. Por otra parte,

$$A(-15) = 0, \quad A(15) = 0, \quad A\left(\frac{15}{2}\right) = \frac{675}{8}\sqrt{3},$$

implica que

$$A\left(\frac{15}{2}\right) \geq \text{máx}\left\{A(-15), A(15)\right\}.$$

El **Criterio C** nos permite concluir que $x = 7.5$ nos proporciona el triángulo rectángulo de mayor área. De (8.3) resulta

$$y\left(\frac{15}{2}\right) = \sqrt{15^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2} = \frac{15\sqrt{3}}{2},$$

además, usando el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo de la Figura 8.4 vemos que su hipotenusa es

$$\sqrt{\left(\frac{15}{2}+15\right)^2+15^2-\left(\frac{15}{2}\right)^2}=15\sqrt{3}.$$

Por lo tanto, el triángulo isósceles buscado es un triángulo equilátero cuyos lados deben medir $15\sqrt{3}$ cm. ■

Ahora tratemos el problema contrario.

Problema 14 *Circunscribir un triángulo isósceles de área mínima en una circunferencia de radio* 15 cm*.*

Solución. Como en el caso anterior, de la Figura 8.5 podemos deducir que basta encontrar el triángulo rectángulo de área mínima que circunscriba a la semicircunferencia de radio 15 cm.

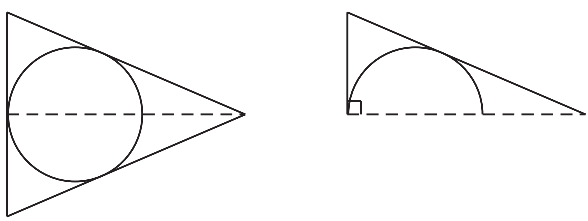


Figura 8.5

Sea b la base del triángulo rectángulo buscado. Si colocamos el origen de coordenadas cartesianas en el vértice del triángulo rectángulo de la Figura 8.5 que forma un ángulo de noventa grados tendremos un esquema como el que aparece en la Figura 8.6.

Así, el semicírculo corresponde a la gráfica de la función

$$f(x)=\sqrt{15^2-(x-15)^2}=\sqrt{x(30-x)},\quad x\in(0,30). \tag{8.4}$$

Sea L la línea recta que coincide con la hipotenusa del triángulo rectángulo. Si (x_1,y_1) es el punto de contacto entre L y el semicírculo, entonces L es la recta tangente a la gráfica de f en dicho punto. Por otra parte,

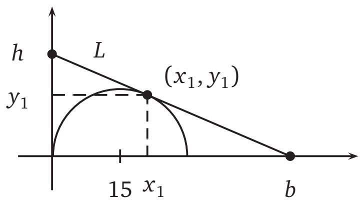


Figura 8.6

de (8.4) tenemos que la pendiente de la recta tangente (que es L) en $(x_1, y_1) = (x_1, f(x_1))$ es

$$\frac{df}{dx}(y_1) = -\frac{x_1 - 15}{\sqrt{x_1(30 - x_1)}}.$$

Por ende, la ecuación de la línea recta L es

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{x_1 - 15}{\sqrt{x_1(30 - x_1)}}. \tag{8.5}$$

Puesto que L pasa por $(b, 0)$, entonces

$$\frac{0 - y_1}{b - x_1} = -\frac{x_1 - 15}{\sqrt{x_1(30 - x_1)}}.$$

Además, ya que (x_1, y_1) está en la gráfica de f entonces (8.4) nos proporciona el valor de y_1, el cual sustituimos en la igualdad anterior para obtener

$$\frac{0 - \sqrt{x_1(30 - x_1)}}{b - x_1} \quad = \quad -\frac{x_1 - 15}{\sqrt{x_1(30 - x_1)}}.$$

Luego despejamos x_1,

$$\begin{aligned} x_1(30 - x_1) = (x_1 - 15)(b - x_1) \quad &\Rightarrow \quad 15x_1 = bx_1 - 15b, \\ &\Rightarrow \quad x_1 = \frac{15b}{b - 15}. \end{aligned}$$

De (8.5) se sigue que la altura h del triángulo rectángulo es

$$h \quad = \quad y_1 + \frac{df}{dx}(y_1)(0 - x_1)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{x_1(30-x_1)} + \frac{x_1}{\sqrt{x_1(30-x_1)}}(x_1-15) \\
&= 15\frac{x_1}{\sqrt{x_1(30-x_1)}} \\
&= 15\frac{\frac{15b}{b-15}}{\sqrt{\frac{15b}{b-15}\left(30-\frac{15b}{b-15}\right)}} = 15\sqrt{\frac{b}{b-30}}. \qquad (8.6)
\end{aligned}
$$

De la Figura 8.6 tenemos que $b > 30$ (cuando $b = 30$ la línea recta que hace contacto con el semicirculo es $y = 30$, esta recta es perpendicular al eje x y nunca toca al eje y, por consecuencia no se forma un triángulo rectángulo). Deseamos minimizar el área A, del triángulo rectángulo de base b y altura h, así $A : (30, \infty) \to \mathbb{R}$ y está dada por

$$A(b) = \frac{15b}{2}\sqrt{\frac{b}{b-30}}.$$

La derivada de A es

$$\frac{d}{db}\left(\frac{15b}{2}\sqrt{\frac{b}{b-30}}\right) = \frac{15(b-45)\sqrt{b}}{(2b-60)\sqrt{b-30}}.$$

Igualando la derivada de A a cero vemos que 45 es el único punto crítico en $(30, \infty)$. Puesto que

$$
\begin{gathered}
\lim_{b\downarrow 30}\frac{15b^{3/2}}{2} = \frac{15(30)^{3/2}}{2}, \quad \lim_{b\downarrow 30}\frac{1}{\sqrt{b-30}} = \infty, \\
\lim_{b\to\infty}\frac{15b}{2} = \infty, \quad \lim_{b\to\infty}\frac{b^{1/2}}{\sqrt{b-30}} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{30}{b}}} = 1,
\end{gathered}
$$

entonces de los incisos $(i.b)$ y $(ii.b)$ del Teorema 7 obtenemos

$$
\begin{gathered}
\lim_{b\downarrow 30}\left(\frac{15b^{3/2}}{2\sqrt{b-30}}\right) = \lim_{b\downarrow 30}\left(\frac{15b^{3/2}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{b-30}}\right) = \infty, \\
\lim_{b\to\infty}\left(\frac{15b^{3/2}}{2\sqrt{b-30}}\right) = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{15b}{2}\times\frac{b^{1/2}}{\sqrt{b-30}}\right) = \infty.
\end{gathered}
$$

Por lo tanto, del **Criterio NC** deducimos que $b = 45$ es el punto mínimo global de A. De (8.6) tenemos

$$h = 15\sqrt{\frac{45}{45-30}} = 15\sqrt{3},$$

y usando el Teorema de Pitágoras resulta que la hipotenusa del triángulo rectángulo de la Figura 8.6 es

$$\sqrt{h^2+b^2} = \sqrt{\left(15\sqrt{3}\right)^2+(45)^2} = 30\sqrt{3}.$$

Así, el triángulo isósceles tiene base $2h = 30\sqrt{3}$ y los lados restantes miden $30\sqrt{3}$. Es decir, es un triángulo equilátero de lados $30\sqrt{3}$. ■

Problema 15 *En un triángulo de lados* 16 *cm,* 12 *cm y* 8 *cm inscribir el rectángulo de mayor área posible de modo que uno de sus lados coincida con el lado de* 16 *cm del triángulo.*

Solución. Coloquemos el triángulo en el plano cartesiano de manera que el lado de 16 cm se encuentre sobre el eje x, como aparece en la Figura 8.7.

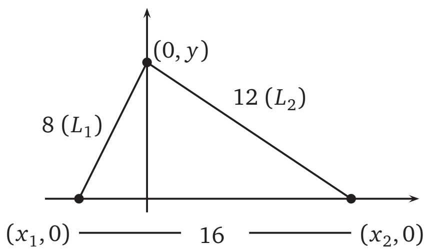


Figura 8.7

Sean L_1 y L_2 las líneas rectas que coinciden con los lados del triángulo de longitud 8 cm y 12 cm, respectivamente. Nuestro primer paso será determinar la ecuación de dichas líneas rectas. Sean x_1 y x_2 los puntos de intersección de las líneas rectas L_1 y L_2 con el eje x, respectivamente, y sea y la altura del triángulo. Nótese que $-x_1 > 0$ y además

$$x_2 + (-x_1) = 16. \tag{8.7}$$

Por otra parte, usando el Teorema de Pitágoras tenemos las siguientes relaciones

$$x_2^2 + y^2 = 12^2, \tag{8.8}$$

$$x_1^2 + y^2 \quad = \quad 8^2. \tag{8.9}$$

De esta manera, tenemos tres ecuaciones y tres variables. Resolvamos el sistema de ecuaciones. A la ecuación (8.8) le restamos la ecuación (8.9),

$$\left(x_2^2 + y^2\right) - \left(x_1^2 + y^2\right) = 12^2 - 8^2 \Rightarrow x_2^2 - x_1^2 = 80,$$

y notamos que el lado izquierdo es una diferencia de cuadrados

$$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = 80.$$

Usando la ecuación (8.7) resulta

$$16(x_2 + x_1) = 80 \Rightarrow x_2 + x_1 = 5.$$

Sumándole a la ecuación anterior la ecuación (8.7) obtenemos

$$(x_2 + x_1) + (x_2 - x_1) = 16 + 5 \Rightarrow 2x_2 = 21.$$

Por lo tanto, $x_2 = \frac{21}{2}$. De (8.7) nos queda

$$x_1 = x_2 - 16 \Rightarrow x_1 = \frac{21}{2} - 16 = -\frac{11}{2},$$

y de (8.8)

$$y = \sqrt{12^2 - \left(\frac{21}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{15}.$$

Así hemos encontrado los valores de x_1, x_2 y y. Con ellos ya podemos encontrar las líneas rectas L_1 y L_2. En efecto, L_1 pasa por los puntos $\left(-\frac{11}{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{3\sqrt{15}}{2}\right)$ y L_2 pasa por $\left(0, \frac{3\sqrt{15}}{2}\right)$, $\left(\frac{21}{2}, 0\right)$. Con estos datos la ecuación de las líneas rectas es (ver (2.1))

$$\frac{L_1(x) - 0}{x - \left(-\frac{11}{2}\right)} = \frac{\frac{3\sqrt{15}}{2} - 0}{0 - \left(-\frac{11}{2}\right)}, \quad \frac{L_2(x) - \frac{3\sqrt{15}}{2}}{x - 0} = \frac{0 - \frac{3\sqrt{15}}{2}}{\frac{21}{2} - 0}.$$

Simplificando, nos queda

$$L_1(x) = \frac{3}{11}\sqrt{15}\left(x + \frac{11}{2}\right), \quad L_2(x) = \frac{3}{2}\sqrt{15} - \frac{1}{7}\sqrt{15}x. \tag{8.10}$$

Ahora pasemos al problema de inscribir el rectángulo. Sea h la altura del rectágulo inscrito en el triángulo de modo que uno de sus lados

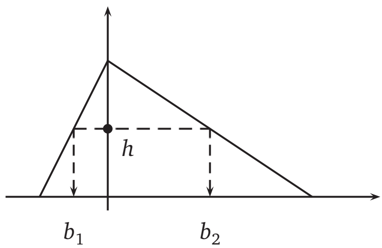


Figura 8.8

coincida con el lado de longitud 16 cm del triángulo. Puesto que la altura del triángulo es $\frac{3\sqrt{15}}{2}$, entonces $0 \leq h \leq \frac{3\sqrt{15}}{2}$. Sean $b_1 = L_1^{-1}(h)$ y $b_2 = L_2^{-1}(h)$. La representación gráfica de b_1, b_2 aparece en la Figura 8.8 (nos muestra también el rectángulo inscrito).

Del método discutido en la Sección 2.2 para encontrar la función inversa de una función lineal, tenemos que

$$b_1 = \frac{11\sqrt{15}}{45}h - \frac{11}{2}, \quad b_2 = \frac{21}{2} - \frac{7}{\sqrt{15}}h.$$

Puesto que b_1 representa una posición no una distancia, tenemos que la base del rectángulo es

$$\begin{aligned} -b_1 + b_2 &= \frac{11}{2} - \frac{11\sqrt{15}}{45}h + \frac{21}{2} - \frac{7}{\sqrt{15}}h \\ &= 16 - \frac{32\sqrt{15}}{45}h. \end{aligned} \tag{8.11}$$

Ya que la altura del rectángulo buscado es h, entonces su área resulta ser

$$A(h) = \left(16 - \frac{32\sqrt{15}}{45}h\right)h.$$

Derivando la función $A : \left[0, \frac{3\sqrt{15}}{2}\right] \to \mathbb{R}$ nos queda

$$\frac{d}{dh}\left[\left(16 - \frac{32\sqrt{15}}{45}h\right)h\right] = 16 - \frac{64\sqrt{15}}{45}h.$$

Igualamos la derivada de A a cero para notar que $\frac{(16)(45)}{64\sqrt{15}} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$ es el único punto crítico en $\left(0, \frac{3\sqrt{15}}{2}\right)$. Para ver qué tipo de extremo es calculamos

$$A(0) = 0, \quad A\left(\frac{3\sqrt{15}}{2}\right) = 0, \quad A\left(\frac{3\sqrt{15}}{4}\right) = 6\sqrt{15}.$$

Puesto que

$$A\left(\frac{3\sqrt{15}}{4}\right) \geq \text{máx}\left\{A(0), A\left(\frac{3\sqrt{15}}{2}\right)\right\}$$

entonces por el **Criterio C** sabemos que $\frac{3\sqrt{15}}{4}$ es el máximo global de A en $\left[0, \frac{3\sqrt{15}}{2}\right]$. Por lo tanto, la altura del rectángulo buscado es $\frac{3\sqrt{15}}{4}$ y su base es

$$16 - \frac{32\sqrt{15}}{45}\left(\frac{3\sqrt{15}}{4}\right) = 8,$$

aquí hemos usado (8.11). ■

Capítulo 9

Solución a los problemas variados

"*El que tiene un porqué para vivir, puede soportar casi cualquier cómo*"
Friedrich Nietzsche

Problema 16 *¿Qué número positivo sumado al cuadrado de su inverso multiplicativo da lugar a la suma mínima?*

Solución. Sea x un número positivo. El cuadrado de su inverso es

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}.$$

Por lo tanto, consideremos la función $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x + \frac{1}{x^2}.$$

Su derivada es

$$\frac{d}{dx}\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^3 - 2}{x^3}.$$

Al igualar la derivada de f a cero vemos que su único punto crítico es $2^{1/3}$. Puesto que

$$\lim_{x\downarrow 0}\left(x+\frac{1}{x}\right)=\infty, \quad \lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)=\infty,$$

entonces el **Criterio NC** implica que $2^{1/3}$ es un mínimo global. De este modo, el número buscado es $2^{1/3}$. ■

Problema 17 *Encontrar la recta de modo que pase por el punto* $(-1,4)$ *y que la suma de las longitudes del segmento negativo y positivo que se obtienen al cortar dicha recta con el eje de las abscisas y con el eje de las ordenadas sea la menor posible.*

Solución. Sea $m=\tan\theta$ la pendiente de la recta que pasa por el punto $(-1,4)$, como se indica en la Figura 9.1.

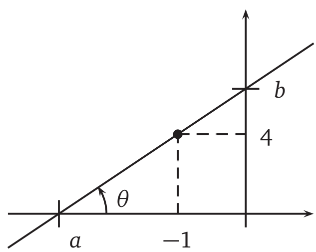


Figura 9.1

De (2.4) tenemos que la ecuación de la recta es

$$y(x)=4+m(x+1), \quad x\in\mathbb{R}.$$

Sean a y b los puntos de intersección entre la línea recta y los ejes x y y, respectivamente. Nótese que $a<0$, $b>0$ y $m>0$. Queremos encontrar a y b. Para esto notamos que $y(a)=0$, entonces $a=y^{-1}(0)$, por lo tanto, (ver (2.7))

$$a=-1+\frac{1}{m}(0-4)\Rightarrow a=-\frac{m+4}{m}.$$

Por otra parte,

$$b=y(0)=m+4.$$

Con esta información la cantidad que queremos minimizar es la longitud $L = -a + b$, la cual la podemos escribir como

$$\begin{aligned} L &= \frac{m+4}{m} + m + 4 \\ &= 5 + m + \frac{4}{m}. \end{aligned}$$

La derivada de la función $L : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es

$$\frac{d}{dm}\left(5 + m + \frac{4}{m}\right) = \frac{m^2 - 4}{m^2}.$$

Al igualar la derivada de L a cero vemos que -2 y 2 son sus puntos críticos, pero 2 es el único punto crítico en $(0, \infty)$. Para ver qué tipo de extremo es calculamos

$$\lim_{m \downarrow 0}\left(5 + m + \frac{4}{m}\right) = \infty, \quad \lim_{m \to \infty}\left(5 + m + \frac{4}{m}\right) = \infty,$$

entonces el **Criterio NC** implica que $m = 2$ es el punto mínimo global de L. Así, la recta buscada pasa por el punto $(-1, 4)$ y tiene pendiente 4, por ende su ecuación es

$$y(x) = 4 + 2(x + 1) = 2x + 6,$$

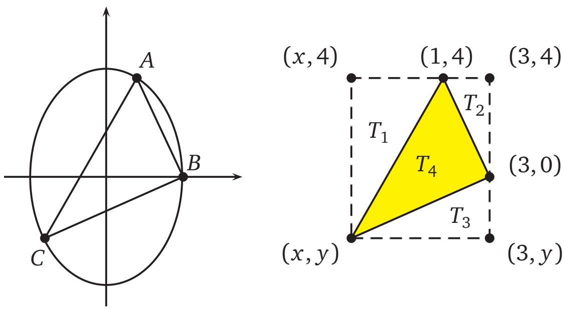
donde hemos usado (2.4). ■

Problema 18 *Los puntos* $A = (1, 4)$ *y* $B = (3, 0)$ *están sobre la elipse* $2x^2 + y^2 = 18$. *Hallar el tercer punto* C *sobre la elipse tal que el área del triángulo* ABC *sea la mayor posible.*

Solución. Para graficar la ecuación de la elipse escribimos (ver (5.9)):

$$\frac{y^2}{(\sqrt{18})^2} + \frac{x^2}{3^2} = 1. \tag{9.1}$$

De esto vemos que la elipse tiene su centro en $(0, 0)$ y que el semieje mayor, paralelo al eje y, tiene una longitud de $\sqrt{18}$ unidades. Por otra parte, el semieje menor, paralelo al eje x, tiene una longitud de 3 unidades. La gráfica de la elipse aparece en la Figura 9.2 (a). Sea $C = (x, y)$ el tercer punto del triángulo sobre la elipse. En particular nótese que $-3 \le x \le 3$.



(a) (b)

Figura 9.2

Para calcular el área del triángulo consideramos el cuadrado que se muestra en la Figura 9.2 (b). El cuadrado está constituido por cuatro triángulos, tres triángulos rectángulos T_1, T_2 y T_3 y el triángulo T_4 , que es el triángulo de interés. Así que el área del cuadrado será igual a la suma del área de estos triángulos:

$$
\begin{aligned}
\text{Área del rectángulo} &= (3-x)(4-y) \\
&= \text{área } T_1 + \text{área } T_2 + \text{área } T_3 + \text{ área } T_4 \\
&= \frac{(4-y)(1-x)}{2} + \frac{(3-1)(4-0)}{2} \\
&\quad + \frac{(3-x)(0-y)}{2} + \text{área } T_4.
\end{aligned}
$$

De esta expresión despejamos el área T_4 para obtener

$$
\begin{aligned}
\text{área } T_4 &= (3-x)(4-y) - \frac{(4-y)(1-x)}{2} \\
&\quad - \frac{(3-1)(4-0)}{2} - \frac{(3-x)(0-y)}{2} \\
&= 6 - 2x - y. \qquad (9.2)
\end{aligned}
$$

Por otra parte, puesto que el punto $C = (x, y)$ está en la elipse, entonces cumple la ecuación (9.1). De ella deducimos que

$$y = \pm\sqrt{18 - 2x^2}. \qquad (9.3)$$

Sustituyendo este valor en (9.2) vemos que hay dos funciones a considerar

$$
\begin{aligned}
A_+(x) &= 6-2x-\sqrt{18-2x^2}, \quad x\in[-3,3],\\
A_-(x) &= 6-2x+\sqrt{18-2x^2}, \quad x\in[-3,3].
\end{aligned}
$$

La función A_+ es menor que la función A_-. Esto conlleva a descartar la función A_+, debido a que estamos interesados en encontrar el punto C que nos dé la mayor área de T_4. La derivada de $A_- : [-3,3] \to \mathbb{R}$ es

$$\frac{d}{dx}\left(6-2x+\sqrt{18-2x^2}\right) = -\frac{2\sqrt{9-x^2}+\sqrt{2}x}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Así, la derivada de A_- es cero si

$$2\sqrt{9-x^2} = -\sqrt{2}x. \tag{9.4}$$

Puesto que el lado izquierdo de (9.4) es no negativo, entonces $x \le 0$. Elevando al cuadrado la igualdad (9.4) y simplificando, vemos que $x = -\sqrt{6}$. Por otra parte,

$$A_-(-3) = 12, \;\; A_-(3) = 0, \;\; A_-\left(-\sqrt{6}\right) = 13.348,$$

implica que

$$A_-\left(-\sqrt{6}\right) \ge \text{máx}\left\{A_-(-3), A_-(3)\right\}.$$

Del **Criterio C** resulta que el punto buscado C tiene componentes $x = -\sqrt{6}$ y

$$y = -\sqrt{18-2\left(-\sqrt{6}\right)^2} = -\sqrt{6},$$

donde hemos usado (9.3). ∎

Problema 19 *Un fabricante de ensaladas sabe que si vende a* \$20 *cada ensalada, entonces venderá* 180 *ensaladas al día. Por cada peso que aumenta al precio de las ensaladas vende* 9 *ensaladas menos al día. Si el costo en la elaboración de una ensalada es de* \$13*, ¿a qué precio de venta es máxima la ganancia diaria que obtiene el fabricante?*

Solución. Sea x el aumento en pesos en el precio por cada ensalada ($x \ge 0$). El precio de venta por ensalada es $20 + x$ pesos y bajo este precio el fabricante venderá $180-9x$ ensaladas al día. Nótese que el número de ensaladas vendidas no puede ser negativo, es decir,

$$180-9x \geq 0 \Rightarrow x \leq 20.$$

El ingreso total es el precio de venta de una ensalada por el número de ensaladas vendidas,

$$(20+x)(180-9x).$$

Por otra parte, el costo total de elaboración es el costo de elaborar una ensalada por el número de ensaladas vendidas,

$$13(180-9x).$$

De esta manera, la ganancia es el ingreso total menos el costo total de elaboración,

$$\begin{aligned} G(x) &= (20+x)(180-9x)-13(180-9x) \\ &= 1,260+117x-9x^2. \end{aligned}$$

La derivada de la función $G:[0,20] \rightarrow \mathbb{R}$ es

$$\frac{d}{dx}(1,260+117x-9x^2) = 117-18x,$$

por lo tanto, $\frac{117}{18} = \frac{13}{2} = 6.5$ es el único punto crítico en $(0,20)$. Además,

$$G(0) = 1,260, \quad G(20) = 0, \quad G\left(\frac{13}{2}\right) = 1,640.3,$$

implica que

$$G\left(\frac{13}{2}\right) \geq \text{máx}\{G(0), G(20)\}.$$

Por lo tanto, del **Criterio C** deducimos que $x = 6.5$ es el punto máximo global de G. De esta manera, el precio de cada ensalada que produce la máxima ganancia es de 26.5 pesos. ■

Problema 20 *Se tiene un cartón de 20 cm de largo por 15 cm de ancho. Se quiere hacer una caja con tapa, ¿cuál ha de ser la altura de la caja para que el volumen sea máximo?*

Solución. Sea x la altura de la caja. Consideremos el esquema de la Figura 9.3.

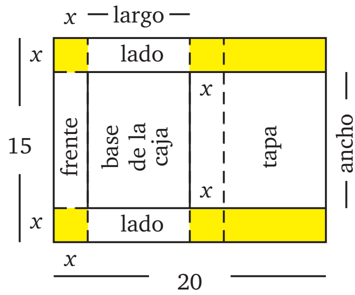


Figura 9.3

Sabemos que el volumen V de la caja es

$$V = \text{largo} \times \text{ancho} \times \text{alto}.$$

Para determinar lo alto de la caja notamos que

$$15 = \text{ancho} + 2x \Rightarrow \text{ancho} = 15 - 2x,$$

por otra parte, lo largo de la caja es

$$20 = 2 \times \text{largo} + 2x \Rightarrow \text{largo} = 10 - x.$$

Puesto que lo largo, lo ancho y lo alto deben ser cantidades no negativas resulta que $0 \leq x \leq \frac{15}{2}$. Por ende, el volumen de la caja $V : \left[0, \frac{15}{2}\right] \to \mathbb{R}$ está dado por

$$V(x) = (15 - 2x)(10 - x)x.$$

La derivada de V es

$$\frac{d}{dx}[(15 - 2x)(10 - x)x] = 6x^2 - 70x + 150.$$

Igualando la derivada de V a cero y usando la fórmula general para ecuaciones de segundo grado tenemos que los puntos críticos son

$$\frac{35 + 5\sqrt{13}}{6} = 8.838 \;\text{ y }\; \frac{35 - 5\sqrt{13}}{6} = 2.828.$$

Por lo tanto, sólo hay un punto crítico en $(0,7.5)$. Por otra parte

$$V(0)=0, \quad V\left(\frac{15}{2}\right)=0, \quad V\left(\frac{35-5\sqrt{13}}{6}\right)=189.52,$$

implica que

$$V\left(\frac{35-5\sqrt{13}}{6}\right)\geq \text{máx}\left\{V(0), V\left(\frac{15}{2}\right)\right\}.$$

Del **Criterio C** deducimos que 2.828 es el punto máximo global de V. De esta manera, para obtener la caja con volumen máximo hay que cortar 2.8 cm en el esquema de la Figura 9.3 (es decir, hay que cortar la parte coloreada). ■

Bibliografía

[1] G. N. Berman (1977). *Problemas y ejercicios de análisis matemático*, Editorial Mir-Moscú.

[2] A. Friedman (1971). *Advanced Calculus*, Dover.

[3] M. R. Spiegel (1989). *Manual de fórmulas y tablas matemáticas*, McGraw-Hill.

[4] M. Spivak (1988). *Calculus*, Editorial Reverté.

[5] E. W. Swokowski (1989). *Cálculo con geometría analítica*, Grupo Editorial Iberoamérica.

[6] J. Villa Morales (2010). *Introducción a las ecuaciones*, Universidad Autónoma de Aguascalientes.

[7] J. Villa Morales (2015). *Cálculo Diferencial*, Universidad Autónoma de Aguascalientes (http://www.uaa.mx/direcciones/dgdv/editorial/docs/calculo_diferencial.pdf).

Problemas de optimización
o de máximos y mínimos

El cuidado de la edición estuvo a cargo
del Departamento Editorial de la Dirección General de Difusión y Vinculación
de la Universidad Autónoma de Aguascalientes.