

## UNIDAD DE APRENDIZAJE II

### Saberes procedimentales

1. Emplea de manera sistemática conceptos algebraicos, geométricos, trigonométricos y de geometría analítica.
2. Relaciona una ecuación algebraica con a gráfica que representa y viceversa.
3. Interpreta los parámetros o elementos de cada una de las ecuaciones de la recta.

### La recta

#### A Concepto de inclinación y pendiente.

El ángulo de inclinación de una recta es el ángulo que forma con el eje x. La medida del ángulo se toma en sentido contrario a las agujas del reloj.

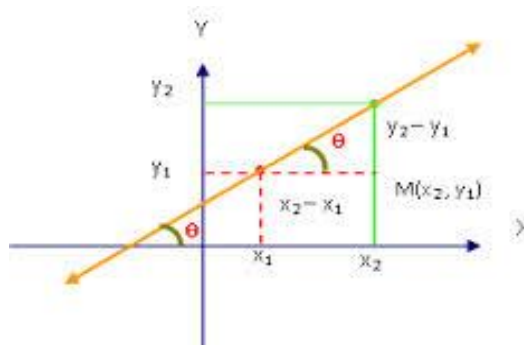
La pendiente o tangente de un ángulo determina el ángulo de inclinación de la recta, es lo que se llama tangente inversa:

La pendiente (GE/AE) es igual a la tangente del ángulo:

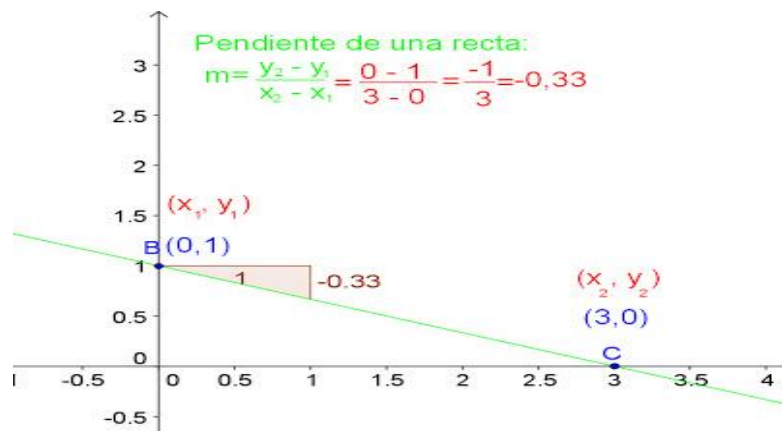
$m = \tan h$ , o lo que es lo mismo  $1/\tan$  (o tangente elevado a -1) de la pendiente es igual al ángulo  $h$ .

$\text{arco tan (de la pendiente)} = \text{ángulo}$

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$



#### Ejemplo



Para determinar la distancia entre dos puntos cualesquiera, se resta uno del otro:

Por ejemplo la distancia del punto tres al punto uno, que es igual a  $3 - 1$ , o bien es igual a  $1 - 3$ , en ambos casos son dos unidades la diferencia, sin tener en cuenta el signo.

En el dibujo tenemos que si restamos  $3 - 0$  tenemos tres unidades en equis, mientras que si restamos  $0 - 1$ , tenemos una unidad en y, con signo negativo, lo que nos informa que la recta tiene pendiente hacia arriba a la izquierda.

Cualesquiera que sean los puntos  $BC$ , las proyecciones de ambos sobre los ejes coordenados están dados por las fórmulas

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1.$$

La pendiente de una recta queda definida por el cociente entre la diferencia de las coordenadas en y y las coordenadas en x.

### Ejercicios

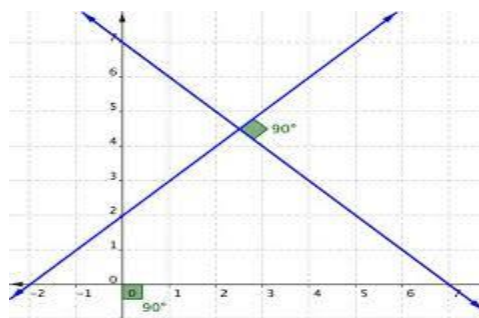
- Hallar la pendiente y la inclinación de la recta que pasa por los puntos  $A(-3,-2)$  y  $B(4,8)$
- Hallar la pendiente y la inclinación de la recta que pasa por los puntos  $C(3,-4)$  y  $D(2,7)$
- Hallar la pendiente y la inclinación de la recta que pasa por los puntos  $R(-5, 3)$  y  $S(6,9)$
- Hallar la pendiente y la inclinación de la recta que pasa por los puntos  $M(2,4)$  y  $N(5,-6)$
- Hallar la pendiente y la inclinación de la recta que pasa por los puntos  $A(3,-2)$  y  $B(-4,7)$

### B Angulo entre dos rectas

El ángulo entre dos rectas del plano es el menor de los dos ángulos que forman éstas entre sí. Son dos ángulos, uno de ellos es agudo y el otro obtuso, a no ser que sean perpendiculares generando un ángulo nulo. Su medida estará comprendida entre  $0$  y  $\pi/2$ .

Dadas dos rectas con pendientes  $m$  y  $m'$ . Se verifica que

$$tg\theta = \left| \frac{m' - m}{1 + mm'} \right|$$



### Ejemplo

Encontrar el ángulo entre las rectas  $AB$  con pendiente  $m = 3$  y  $m' = -2$ .

Sustituimos  $tg\theta = \left| \frac{-2-3}{1+(3)(-2)} \right| = \left| \frac{-5}{1-6} \right| = \left| \frac{-5}{-5} \right| = 1 \quad inv\ tg = 45^\circ$

Cuadrante I  $45^\circ$  y cuadrante III  $225^\circ$

**Nota:** Recordar que la tangente es positiva en el cuadrante I y III; y negativa en el cuadrante II y IV.

**Ejercicios** Hallar el ángulo que forman las rectas  $r: 2x - 3y + 5 = 0$  y  $s: x + 4y - 2 = 0$ .

Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto  $P(2, 4)$  y forma con la recta de ecuación  $2x + 5y - 3 = 0$  un ángulo de  $45^\circ$

### C Perpendicularidad y paralelismo

Si las pendientes son iguales o bien equivalentes son paralelas; si las pendientes son recíprocas son perpendiculares y si son diferentes se determinan pendientes oblicuas.

#### Ejercicios

##### 1. Condición de paralelismo

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto  $A(5,6)$  y es paralela a la recta que pasa por los puntos  $M(-4,1)$  y  $N(3,-2)$

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto  $D(-4,3)$  y es paralela a la recta que pasa por los puntos  $J(5,-2)$  y  $K(-1,-3)$

¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto  $(2,-3)$  y es paralela al eje  $x$ ?

Da la ecuación de la recta paralela a la recta  $4x - y + 5 = 0$ , que pasa por el punto  $(-2,7)$ .

##### 2. Condición de perpendicularidad

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto  $A(-4,5)$  y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos  $F(-4,5)$  y  $T(6,-3)$

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto  $B(2,-4)$  y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos  $P(-3,-4)$  y  $R(6,5)$

Encuentra la ecuación de la recta perpendicular a la recta  $2x - 6y + 7 = 0$  que pasa por el punto  $(-2,4)$ .

La recta perpendicular a la recta  $2x - 5y + 8 = 0$  que pasa por el punto  $(2,-6)$ , es :

### D Ecuación forma punto pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

#### Ejercicios

- Encuentra la ecuación de la recta que tiene pendiente  $-\frac{1}{5}$  y pasa por el punto  $(-3,2)$ .
- Pasa a la forma general la recta que pasa por el punto  $(3,-4)$  con pendiente  $m = \frac{-1}{3}$ .
- Determina la ecuación de la recta, en su forma general, con pendiente  $m$  que pasa por el punto que se indica en cada caso.

a)  $m = 2$ , punto  $(2, 3)$

d)  $m = -\frac{5}{3}$ , punto  $(0, 0)$

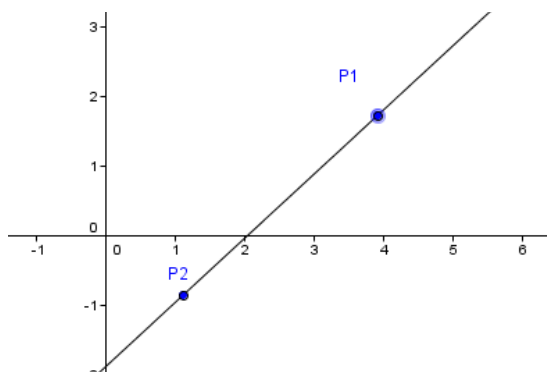
b)  $m = -3$ , punto  $(0, -4)$

e)  $m = 1$ , punto  $(-3, -7)$

c)  $m = \frac{2}{5}$ , punto  $(-3, 0)$

### E Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Geoméricamente, una recta queda perfectamente determinada por dos cualquiera de sus puntos. Analíticamente, la ecuación de una recta también queda perfectamente determinada conociendo las coordenadas de dos de cualquiera de sus puntos.



La recta que pasa por los puntos  $P_1$  y  $P_2$  tiene por ecuación:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x - x_1) \quad \text{Donde } x_1 \neq x_2.$$

**Ejemplo** Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $P_1 = (-3, 1)$  y el punto  $P_2 = (5, 2)$

Se tiene que de  $P_1$ ,  $x_1 = -3$  y  $y_1 = 1$ , de  $P_2$  se tiene  $x_2 = 5$ ,  $y_2 = 2$ . Entonces,

$$y - 1 = \frac{1 - 2}{-3 - 5} (x + 3)$$

$$y - 1 = \frac{-1}{-8} (x + 3)$$

$$-8(y - 1) = -1(x + 3)$$

$$-8y + 8 = -x - 3$$

$$x - 8y = -11$$

**Ejercicios** Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos:

a.  $A(-2, 8)$ ,  $B(4, 7)$

d.  $D(0, 0)$ ,  $E(-8, 14)$

b.  $M(5, -1)$ ,  $N(-2, 17)$

e.  $W(-7, -2)$ ,  $Y(4, -7)$

c.  $P(3, 3)$ ,  $Q(9, 23)$

## F Coordenadas al origen

Consideremos una recta cuya pendiente es  $m$ , y cuya ordenada al origen, es decir, su intersección con el eje  $y$ , es  $b$ . Como se conoce  $b$ , el punto cuyas coordenadas son  $(0, b)$  está sobre la recta. Por tanto, el problema se reduce a hallar la ecuación de la recta que pasa por un punto  $(0, b)$  y tiene pendiente dada. Entonces:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - b = m(x - 0)$$

$$y = mx + b$$

**Ejemplo** Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto  $A = (0, 8)$  y pendiente  $m=2$

$$y - 8 = 2(x - 0)$$

$$y = 2x + 8$$

**Ejercicios** Hallar la ecuación de la recta:

a.  $m = -3$  y  $B(0, 7)$

d.  $m = -5$  y  $T(0, 21)$

b.  $m = 9$  y  $C(0, -5)$

e.  $m = -6$  y  $Q(0, 29)$

c.  $m = 27$  y  $D(0, -1)$

## G Ecuación en forma simétrica

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

**Ejercicios**

1. Deduce la ecuación de la recta en su forma simétrica de acuerdo a los siguientes datos:

a)  $a = 4, b = 2$

c)  $a = \frac{2}{3}, b = -\frac{2}{5}$

b)  $a = 2, b = \frac{1}{2}$

d)  $a = -1, b = 3$

2. Una recta tiene de ecuación  $4x + 8y - 12 = 0$ , determina su ecuación en forma simétrica y su gráfica.

3. Una recta tiene de ecuación  $3x - 8y + 4 = 0$ , determina su ecuación en forma simétrica y su gráfica.

4. Una recta tiene de ecuación  $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$  determina su ecuación en forma general y su gráfica.

5. Una recta tiene de ecuación  $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$  determina su ecuación en forma general y su gráfica.

## H Forma general de la recta

$$Ax + By + C = 0$$

### Ejercicios

- Si se parte de las coordenadas la fórmula es:  $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$   
Pasa a la forma general la recta que pasa por los puntos (3,-2) y (-1,4).
- Determina la ecuación de la recta, en su forma general, que pasa por los puntos que se indica en cada caso.
  - (2, 3), (-2, 5)
  - (0, 3), (3,-5)
  - (2, -1), (3, 5)
  - $(\frac{1}{2}, 3)$ ,  $(\frac{3}{4}, -2)$

### EJERCICIOS ADICIONALES

- Escribe de todas formas posibles la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $A(1, 2)$  y  $B(-2, 5)$ .
- De un paralelogramo ABCD conocemos  $A(1, 3)$ ,  $B(5, 1)$ ,  $C(-2, 0)$ . Halla las coordenadas del vértice D.
- Hallar la ecuación de la recta r, que pasa por  $A(1, 5)$ , y es paralela a la recta s,  $2x + y + 2 = 0$
- Hallar la ecuación de la recta, dados los siguientes datos:
  - $m = -1$ ,  $A(-2, 3)$
  - $m = 2$ ,  $A(-3/2, -1)$
  - $m = -1$ ,  $A(-3, 0)$
  - $m = 0$ ,  $A(-2, 3)$
  - $m = -4$ ,  $A(2/3, -2)$
  - $m = -\frac{2}{5}$ ,  $A(1, 4)$
  - $m = \frac{3}{4}$ ,  $A(2.5, -3)$
  - $A(4, 17)$ ,  $B(-2/3, 4/2)$
  - $D(-1.5, 4.1)$ ,  $F(2, 3)$
  - $G(9, -9)$ ,  $H(0, 0)$