

UNIDAD DE APRENDIZAJE VI

Saberes procedimentales

1. Identifica el concepto de la derivada de una función.
2. Define con claridad las características de una función implícita.

A Concepto de derivada de orden n

Cuando se tiene una función $y = f(x)$ puede ocurrir que al derivar esta función $\frac{dy}{dx} = y'$ se tenga una nueva función que a su vez también se pueda derivar; en este caso la derivada de la primera derivada se le llama segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2} = y''$.

Análogamente, la derivada de la segunda derivada se le llama tercera derivada $\frac{d^3y}{dx^3} = y'''$ y así sucesivamente hasta la enésima derivada.

Generalizando la idea anterior, las derivadas sucesivas las podemos representar de diferente manera:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = f''(x) = D^2y = f^{(2)}(x)$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = y''' = f'''(x) = D^3y = f^{(3)}(x)$$

Ejemplos

a) Hallar la segunda derivada de $y = e^{x^2}$

$$y' = 2x e^{x^2} \quad \frac{du}{dx} = 2 \quad \frac{dv}{dx} = 2xe^{x^2}$$

$$y'' = 2x(2xe^{x^2}) + e^{x^2}(2)$$

$$y'' = 4x^2 e^{x^2} + 2e^{x^2} = 2e^{x^2}(2x^2 + 1)$$

$$y = 2e^{x^2}(2x^2 + 1)$$

b) Cuarta derivada de $y = \cos 4x$

$$y' = -4 \operatorname{Sen} 4x$$

$$y'' = -4(4 \operatorname{Cos} 4x) = -16 \operatorname{Cos} 4x$$

$$y''' = -16(-4 \operatorname{Sen} 4x) = 64 (\operatorname{Sen} 4x)$$

$$y^{iv} = 64 (4 \text{ Cos } 4x) = 256 \text{ Cos } 4x$$

$$y^v = 256 (-4 \text{ Sen } 4x) =$$

$$y^v = -1024 \text{ Sen } 4x$$

c) VIII Derivada de $y = x^8 - 9x^7 + 8x^6 - 4x^3 + 2x - 2015$

$$y^I = 8x^7 - 63x^6 + 48x^5 + 12x^2 + 2$$

$$y^{II} = 56x^6 - 378x^5 + 240x^4 - 24x$$

$$y^{III} = 336x^5 - 1890x^4 + 960x^3 - 24$$

$$y^{IV} = 1680x^4 - 7560x^3 - 2880x^2$$

$$y^V = 6720x^3 - 22680x^2 - 5760x$$

$$y^{VI} = 20160x^2 - 45360x + 5760$$

$$y^{VII} = 40320x - 45360$$

d) II Derivada de $y = \ln (x^2 - 1)$

$$y^I = \frac{1}{x^2-1} + (2x) \quad = \frac{2x}{x^2-1} \quad \frac{du}{dv} = 2 \quad \frac{dv}{dx} = 2x$$

$$y^{II} = \frac{(x^2-1)(2) - (2x)(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^2-2-4x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^2-2}{(x^2-1)^2}$$

$$y^{II} = \frac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$$

e) III Derivada de $y = xe^{3x}$ $\frac{du}{dv} = 1$ $\frac{dv}{dx} = 3e^{3x}$

$$y^I = x (3e^{3x}) - e^{3x} (1)$$

$$y^I = 3e^{3x} + e^{3x}$$

$$y^I = e^{3x} (3x + 1) \quad \frac{du}{dv} = 3e^{3x} \quad \frac{dv}{dx} = 3$$

$$y^{II} = e^{3x} (3) + (3x + 1) (3e^{3x})$$

$$y^{II} = 3e^{3x} (1 + 3x + 1)$$

$$y^{II} = 3e^{3x} (3x + 2) \quad \frac{du}{dv} = 9e^{3x} \quad \frac{dv}{dx} = 3$$

$$y^{III} = 3e^{3x} (3) + (3x + 2) (9e^{3x})$$

$$y''' = 9e^{3x} (1) + 9e^{3x} (3x + 2)$$

$$y''' = 9e^{3x} + 27x e^{3x} + 2 (9e^{3x})$$

$$y''' = 9e^{3x} (3x + 3)$$

$$y''' = 27 e^{3x} (x + 1)$$

f) II Derivada de $y = \ln (4x - 1)$

$$y' = \frac{1}{4x-1} (4)$$

$$y' = \frac{1}{4x-1}$$

$$y'' = \frac{-4}{(4x-1)^2} (4)$$

$$y'' = \frac{-16}{(4x-1)^2}$$

g) III Derivada de $y = e^{4x} + x^3$

$$y' = 4e^{4x} + 3x^2$$

$$y'' = 16 e^{4x} + 6x$$

$$y' = 64 e^{4x} + 6$$

h) IV Derivada de $y = \text{Sen}x$

$$y' = \text{Cos}x (1)$$

$$y' = \text{Cos}x$$

$$y'' = -\text{Sen}x$$

$$y''' = -(\text{Cos}x)$$

$$y''' = -\text{Cos}x$$

$$y^{IV} = -(-\text{Sen}x)$$

$$y^{IV} = \text{Sen}x$$

i) III Derivada de $y = \ln \left(\frac{4-x}{5x+1} \right)$

$$y' = \ln (4 - x) - \ln (5x + 1)$$

$$y' = \frac{1}{4-x} (-1) - \frac{1}{5x+1} (5)$$

$$y'' = \frac{-1}{4-x} - \frac{5}{5x+1}$$

$$y' = \frac{-1}{(4-x)^2} (1) - \frac{5}{(5x+1)^2} (5)$$

$$y'' = \frac{1}{(4-x)^2} - \frac{25}{(5x+1)^2}$$

$$y' = \frac{1(-1)}{(4-x)^4} - \frac{25(5)}{(5x+1)^4}$$

$$y''' = \frac{-1}{(4-x)^4} - \frac{125}{(5x+1)^4}$$

J) IV Derivada de $y = e^x - e^{-x}$

$$y' = e^x (1) - e^{-x} (-1)$$

$$y' = e^x + e^{-x}$$

$$y'' = e^x (1) + e^{-x} (-1)$$

$$y'' = e^x - e^{-x}$$

$$y''' = e^x (1) - e^{-x} (-1)$$

$$y''' = e^x + e^{-x}$$

$$y^{IV} = e^x (1) + e^{-x} (-1)$$

$$y^{IV} = e^x - e^{-x}$$

EJERCICIOS

1. $f(x) = \frac{4}{3}x^3$
2. $g(x) = 4x^3 - 2x^2 - x + 5$
3. $h(x) = \text{sen } x + \cos x$
4. $k(y) = \frac{y^2}{2}$
5. $m(x) = \sqrt{\text{sen } x}$
6. $n(t) = \tan t + t^3$
7. $b(y) = \text{Ln } \cos y$
8. $C(x) = \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$
9. $d(x) = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$
10. $x^2 + y^2 = r^2$

B Derivación de función implícita

Cuando se da una relación entre dos o más variables y la función dada no esta resuelta para una de las variables, entonces se le llama función implícita.

Cuando en una expresión algebraica, se encuentra despejada una variable se dice que esta en forma explícita $y = x^2 + 2x - 4$

En algunas ocasiones tenemos relación de dos o más variables en la cual no esta despejada ninguna variable, en este caso se dice que está en forma implícita $x^2 + y^2 = r^2$.

Para derivar una función implícita se siguen los siguientes pasos:

1. Se designa una variable con respecto a la que se va a derivar (x, y, t, etc...) y se designa cuales son constantes.
2. Se deriva término a término, aplicando las reglas de derivación.
3. Se despeja la derivada que se desea calcular.

Ejemplo

$$y^3 + 3x^2 + yx = 0$$

Paso 1: Derivar respecto a x y considerar y una constante

Paso 2: Derivando término a término

$$3y^2y' - 6x + y(1) + xy' = 0$$

Paso 3: Despejando

$$3y^2y' + xy' = 6x - y$$

$$y'(3y^2 + x) = 6x - y$$

$$y' = \frac{6x - y}{3y^2 + x}$$

Obteniendo la derivada de la función $y = f(x)$.

Ejemplos

Derivar implícitamente con respecto de x

a) $5x^3y + 4y^4 - 8xy^3 + 5 = 0$

$$5 [x^3 y' + y (3x^2)] + 4 (4y^3 y') - 8 [x (x^2y') + y^3 (1)] + 0 = 0$$

$$5x^3 y' + 15x^2 y' + 16y^2 y' - 24xy^2 y' - 8y^3 = 0$$

$$y' [5x^3 + 16y^3 - 24xy^2] = 8y^3 - 15x^2y$$

$$y' = \frac{8y^3 - 15x^2y}{5x^3 + 16y^3 - 24xy^2}$$

b) $5xy + 2y^3 - 8x^2y = 0$

$$y' = 5(xy' + y (1)) + 6y^2 - 8 [x^2 (2yy') + (2x)] = 0$$

$$y' = 5xy' + 5y + 6y^2yy' - 16xy^2 = 0$$

$$y' = [5x + 6y^2 - 16x^2y]$$

$$y' = 16xy^2 - 5y$$

$$y' = \frac{16xy^2 - 5y}{5x + 6y^2 - 16x^2y}$$

c) Hallar el valor de y'' en el punto $(-1, 1)$ de la curva $x^2y + 3y - 4 = 0$

$$y' = x^2y' (2x) + 3y' = 0$$

$$y' = x^2y' + 2xy + 3y' = 0$$

$$y' = y' (x^2 + 3) = -2xy$$

$$y' = \frac{-2xy}{x^2 + 3}$$

$$y' = \frac{-2(-1)(1)}{(1)^2 + 3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$y'' = x^2y'' (2x) + 2 [xy' + y (1)] + 3y'' = 0$$

$$y'' = x^2y'' + 2xy' + 2xy' + 2 + 3y'' = 0$$

$$y'' = (x^2 + 3) = -4xy' - 2y$$

$$y'' = \frac{-4xy' - 2y}{x^2 + 3}$$

$$y'' = \frac{-4(-1)\left(\frac{1}{2}\right) - 2(1)}{(-1)^2 + 3} = \frac{2 - 2}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

d) Derivar de manera implícita la siguiente función:

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$2x + 2yy' = 0$$

$$y' [2y] = -2x$$

$$y' = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}$$

e) Derivar de manera implícita las siguiente función:

$$x^3 + y^3 = 8xy$$

$$3x^2 + 3y^2y' = [xy' + y (1)]$$

$$3x^2 + 3y^2y' = 8xy' + 8xy' + 8y$$

$$Y' [3y^2 - 8x] = 8y - 3x^2$$

$$y' = \frac{8y-3x^2}{3y^2-8x}$$

EJERCICIOS

Derivar de manera implícita las siguientes funciones

1.- $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$

2.- $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$

3.- $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{xy} = 4y^2$

4.- $x^3 + y^3 = 2xy$

5.- $x \cos y + y \cos x = 1$

6.- $x \sin y + \cos 2y = \cos y$

Encuentra la derivada que se indica en las siguientes funciones

1.- Encuentra la segunda derivada de $y = x\sqrt{x-3}$

2.- Encuentra la segunda derivada de $y = \sqrt{\cot 5x}$

3.- Encuentra la segunda derivada de $y = \ln \left(\frac{3x-7}{4-x} \right)$

4.- Encuentra la segunda derivada de $y = \log (4x-7)^3$

5.- Encuentra la IV derivada de $y = \sec (5x + 2)$