UNIDAD DE APRENDIZAJE II

Saberes procedimentales

1. Interpreta adecuadamente la relación de dependencia que se establece entre dos variables, así como la razón de cambio entre sus valores.
2. Define en forma adecuada el concepto de derivada.
3. Identifica las fórmulas empleadas para derivar funciones algebraicas.

A Incrementos

En la matemática se considera el incremento de una variable como el aumento o disminución que experimenta desde un valor $x - x_0$ otro $x - x_1$, valores que deben estar comprendidos dentro de su campo de variación. Esto lo podemos simbolizar de la siguiente manera:

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

Ejemplos

1. Hallar Δx si la variable x cambia de $x_0 = 3$ a $x_1 = 7$

   Luego $\Delta x = 7 - 3$
   $\Delta x = 4$

2. Encontrar Δx si $x_0 = 11$ a $x_1 = 5$
   Luego $\Delta x = 5 - 11$
   $\Delta x = -6$

   en este caso se afirma que se trata de un decremento o incremento negativo

Relación entre los incrementos de la función y la variable independiente

Por otra parte debemos considerar que una función $y = f(x)$, si se da un incremento Δx a la variable x, $\Delta x = x_1 - x_0$, entonces la función se verá incrementada en $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = y(x_1) - y(x_0)$, ya que $x_1 = x_0 + \Delta x$ y $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{incremento\ y}{incremento\ x}$, recibe el nombre de cociente de incrementos de la función.

Ejemplo

Dada la función $y = x^2 + 5x - 8$. Calcular Δy y $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando x varía de:

a) $x_0 = 1 \quad a \quad x_1 = 1.2$

Si calculamos Δx, se tiene que $\Delta x = x_1 - x_0 = 1.2 - 1$

$$\Delta x = 0.2$$

Por otra parte se tiene que:

$$y(x_0) = y(1) = 1 + 5 - 8 = -2$$

$$y(x_1) = y(1.2) = 1.44 + 6 - 8 = -0.56$$

$$\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$$

$$= -.56 - (-2)$$

$$\Delta y = 1.44$$

Además $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1.44}{0.2} = 7.2$

Si este planteamiento lo hacemos de otra manea diríamos que si para la función $y = x^2 + 5x - 8$. Incrementamos a las dos variables se obtiene:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x) - 8$$

Simplificando y eliminando términos semejantes, nos queda:

$$\Delta y = 2x\Delta x + \overline{\Delta x}^2 + 5\Delta x$$

La cual es una expresión algebraica que representa el valor de incremento de y en lo general. Para nuestro caso se tiene que $x = 1$ y $\Delta x = 0.2$, sustituyendo:

$$\Delta y = 2(1)(0.2) + (0.2)^2 + 5(0.2)$$

$$\Delta y = 0.4 + 0.04 + 1 = 1.44$$

Si ahora queremos conocer el valor de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, dividimos la expresión que representa Δy entre Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x + 5$$

Sustituyendo $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2(1) + 0.2 + 5 = 7.2$

Obteniendo los mismos resultados que el método anterior.

B | Definición de la derivada de una función

Se define la derivada de una función como el resultado de calcular el límite del cociente de los incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, cuando el incremento del denominador Δx tiende a valer cero, esto es:

$$\log_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \log_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Siempre que el límite exista.

La derivada se puede denotar de las siguientes formas:

$$f'(x) = \left(f(x)\right)' = D_x[f(x)] = D_x y = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

Entonces $f'(x) = \log_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Además, la definición de derivada se puede enunciar de la siguiente manera:

a) *Recta tangente:* La pendiente de la recta tangente la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ es $f'(a)$.
b) *Velocidad:* Si un punto P se mueve a lo largo de una recta coordenada de manera que al tiempo t su coordenada es $s(t)$, entonces su velocidad al tiempo a es $s'(a)$.

Regla general para la derivación

Si establecemos un procedimiento general para el cálculo de la derivada de una función, este queda de la siguiente manera.

Primero debemos incrementar a las variables de la función:

$$y = f(x)$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

Luego, podemos restar miembro a miembro las dos ecuaciones anteriores:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Ahora, dividimos ambos miembros de la igualdad entre Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Obteniendo el cociente de los incrementos, y para finalizar debemos calcular el límite cuando $\Delta x \to 0$

$$\log_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \log_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Obteniendo la derivada de la función$y = f(x)$.

Ejemplos

A. Hallar la derivada de la función $y = 2x^3 + 5x^2 + 8x - 3$

Procediendo igual que en el caso de incrementos se tiene

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 + 8(x + \Delta x) - 3$$

Simplificado:

$$\Delta y = -8x - 8\Delta x - 3 - 2x^3 - 5x^2 + 8x + 3$$

Luego $\Delta y = 6x^2\Delta x + 6x\overline{\Delta x}^2 + 2\overline{\Delta x}^3 + 10x\Delta x + 5\overline{\Delta x}^2 - 8\Delta x$

Dividiendo entre Δx y calculando el $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 6x^2 + 6x\Delta x + 2\overline{\Delta x}^2 + 10x + 5\Delta x - 8$$

$$= 6x^2 + 10x - 8$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 10x - 8$$

Expresión que representa la derivada de la función.

B. Encontrar la derivada de la función $S = \frac{x^2}{3x-1}$

Procedimiento igual se tiene:

$$S + \Delta s = \frac{(x+\Delta x)^2}{3(x+\Delta x) - 1}$$

Restando $\Delta s = \frac{(x+\Delta x)^2}{3(x+\Delta x)-1} - \frac{x^2}{3x-1}$

Simplificando

$$\Delta s = \frac{(x+\Delta x)^2(3x-1) - x^2[3(x+\Delta x) - 1]}{[3(x+\Delta x) - 1](3x-1)}$$

$$\Delta s = \frac{3x^2 - x^2 + 6x^2\Delta x - 2x\Delta x + 3x\overline{\Delta x}^2 - \overline{\Delta x}^2 - 3x^3 - 3x^3\Delta x + x^2}{[3(x+\Delta x) - 1](3x-1)}$$

$$\Delta s = \frac{3x^2\overline{\Delta x}^2 - 2x\Delta x + 3x\overline{\Delta x}^2 - \overline{\Delta x}^2}{[3(x+\Delta x) - 1](3x-1)}$$

Dividiendo entre Δx y colocando el limite cuando $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 - 2t + 3x\Delta x - \Delta x}{[3(x+\Delta x) - 1](3x-1)}$$

$$= \frac{3x^2 - 2x}{(3x-1)^2}$$

La cual representa la derivada de la función.

EJERCICIOS

1. Dada la función $y = x^2 + 5x - 8$, calcular Δy y $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando x varia de $x_0 = 1$ a $x_1 = 0.8$.
2. Calcular Δy y $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ en los casos siguientes:
   a. $y = 2x - 3$, y x pasa de 3.3 a 3.5
   b. $y = x^2 + 4x$, y x pasa de 0.7 a 0.85
   c. $y = \frac{2}{x}$, y x pasa de 0.75 a 0.5
3. Si $S = 5t^2$ calcular $\frac{\Delta S}{\Delta t}$, cuando t varia de:
   a. De 3 a 3.5
   b. De 3 a 3.2
   c. De 3 a 3.1

Calcular la derivada de las siguientes funciones, aplicando el límite del cociente de incrementos:

4. $y = x^3 - 11x^2 - 8x - 6$
5. $y = 7x^2 - 9x - 5$
6. $y = \frac{4}{x+2}$
7. $y = \frac{3x}{2x-5}$
8. $S = \frac{1}{t^2}$
9. $S = \frac{2t-1}{2t+1}$
10. $y = \sqrt{3x-1}$ Sugerencia: recuerda el desarrollo del límite en este tipo de funciones, en donde es necesario racionalizar.

C Fórmulas para derivar funciones algebraicas

A partir del método o regla general, es posible determinar las fórmulas para calcular las derivadas de las funciones algebraicas.

Para simplificar las operaciones, tomaremos como punto de partida la expresión de la derivada como el límite del cociente entre los incrementos de x e y

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{d}{dx} y = y' = f'(x)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Función constante

Sea $f(x) = C$, función constante, entonces $y = C$, para cualquier valor de x. Entonces:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

De este desarrollo obtenemos la primera fórmula para derivar funciones algebraicas:

Derivada de función constante	$\frac{d}{dx} C = 0$

Ejemplos

Si $f(x) = 4$, entonces $f'(x) = 0$

Si $y = \pi$, entonces $y' = \frac{d}{dx}\pi = 0$

Función identidad

Sea $f(x) = x$, de tal forma que $f(x + \Delta x) = x + \Delta x$ y sustituyendo:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

Entonces

Derivada de función identidad	$\frac{d}{dx} x = 1$

Constante por función

Si una constante "C" multiplica a una función $f = Cf(x)$ y $y + \Delta y = Cf(x + \Delta x)$ entonces:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Cf(x+\Delta x) - Cf(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} =$$

$$= C \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = C\, f'(x)$$

Se dice entonces que la derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

Derivada de constante por función	$\frac{d}{dx} Cf(x) = Cf'(x)$

Ejemplo

Si $y = 9x$, entonces $y' = 9\,(1) = 9$

Suma de funciones

Sean u, v y w tres funciones de x, y sea y la suma de estas tres funciones, esto es $y = u + v + w$, dado que al derivar y se tendría que calcular el límite de cada expresión y por los teoremas sobre límites (el límite de una suma es igual a la suma de los límites), se tiene que:

Derivada de suma de funciones	$\frac{d}{dx}[u + v + w] = u' + v' + w'$

EJERCICIO

Derivar $y = x^2$, $y = x^3$ y $y = x^n$.

Reglas para derivar funciones algebraicas

Función	Funciones	Derivadas
Constante	$f(x) = C$	$f'(x) = 0$
Identidad	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
Constante por Función	$y = Cf(x)$	$y' = Cf'(x)$
Potencia	$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Suma de funciones	$y = f(x) + g(x) + h(x)$	$y' = f'(x) + g'(x) + h'(x)$
Producto de funciones	$y = f(x) * g(x)$	$y' = f(x) * g'(x) + g(x) * f'(x)$
División de funciones	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

Regla de la Cadena

En ocasiones una variable está en función de otra, la cual, a su vez, es función de una tercera. A este tipo de funciones se les conoce como *funciones compuestas o función de un función.*

Las funciones compuestas se denotan $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Ejemplo

Sea $f(x) = 2x^2 - 8x - 3$ y $g(x) = 3x^5$, entonces

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(3x^5) = 2(3x^5)^2 - 8(3x^5) - 3$$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x^2 - 8x - 3) = 3(2x^2 - 8x - 3)^5$$

Para calcular la derivada de la primera variable respecto de la segunda o tercera, se puede utilizar lo que se conoce como *regla de la cadena.*

Si $y = f(u)$ es una función derivable de u y $u = g(x)$ es una función derivable de x, entonces:

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{d}{dx}y = \frac{d}{du}y * \frac{d}{dx}u}}$$

En lenguaje común, decimos que la derivada de y con respecto a x, donde y es función de u y v es función de x, es igual al producto de las derivadas de las funciones correspondientes.

Ejemplo

1. Si $y = \sqrt{u}$ y $u = x^3 + 2$, derivando por separado las funciones anteriores, haciendo la consideración de que $\sqrt{u} = u^{1/2}$

$$\frac{d}{du}y = \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$\frac{d}{dx}u = 3x^2$$

Sustituyendo en $\frac{d}{dx}y = \frac{d}{du}y * \frac{d}{dx}u$

$$\frac{d}{dx}y = \frac{1}{2\sqrt{u}}(3x^2) = \frac{3x^2}{2\sqrt{u}} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 2}}$$

2. Si $y = (5x^2 + 8)^4$

Sea $u = 5x^2 + 8$ y $n = 4$, además $\frac{d}{dx}u = 10x$ entonces

$$\frac{d}{dx}y = 4(5x^2 + 8)^{4-1}(10x)$$

$$y' = 40x(5x^2 + 8)^3$$

EJERCICIOS Utiliza la fórmula correspondiente, derivar cada una de las funciones siguientes y simplificar. Observa que en algunos casos será necesario aplicar más de una fórmula para llegar al resultado.

1. $y = 3x^2 - 5x + 6$
2. $f(x) = 7x - \sqrt{x}$
3. $y = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 2x - 1)$
4. $S(t) = t^5$
5. $z = u^{-8}$
6. $y = w^{\frac{5}{3}}$
7. $w = \frac{s+1}{s-1}$
8. $g(x) = (x^3 - x)^6$
9. $u = \frac{v^2-2v}{v^2+v+1}$
10. $f(x) = \left(\frac{2x+5}{3x-2}\right)^5$
11. $v = \frac{(s+2)^2}{s+3}$
12. $y = \sqrt{4 + x^2}$
13. $y = \sqrt[3]{\frac{1}{3+x^2}}$
14. $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$
15. $y = \sqrt{\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}}$
16. $f(x) = \frac{25}{(x^3-2x)^4}$